دوره حل المسائل جبر و مقابله

تألیف

بدون ریاضیات نمیتوان بکنه فلسفه پی برد.
بدون فلسفه نمیتوان حقایق ریاضیات را درک کرد
بدون این دو بشر بدرک هیچ حقیقتی نائل نمیشود
(برداد مولن)

غلامحسین مصاحب



معلم سابق دار المعلمین مرکزی - صاحب مدال علمی درجه دوم

برای سالهای دوم و سوم متوسطه

تقدیم مقام منیع معاونت کل گردید

با نضمام اصول مطالب و قضایا

چاپ اول



بنام خداوندگار مهربان

نویسندگان و مصنفین هر یک بسهم خویش در باب لزوم بسط و توسعه علوم و معارف مقالات و رسائلی نگاشته اند چنانکه اکنون قلم فرسائی در اینموضوع شاید تکرار مکرر و ملال آور باشد زیرا برای فهم بدیهیات دلیل و برهان یا طول مقال زاید و بیجاست و فقط تذکاری کافی است تا مردمان بدان متوجه گردند آنگاه بمدد ادراک خود دریابند مطلبی را که ما ناگفته گذاشتیم و گذشتیم از همین بدیهیاتی است که بی دلیل و برهان متبع و مسلم میباشد.

اما از بدبختی در خصوص عملی کردن علوم و نتایج بسیاری که از اینکار بدست میآید چنانکه شاید و باید نویسندگی نگرده اند درصورتیکه این موضوع مهمتر است و باید بیشتر منظور نظر نویسندگان باشد

امروز شاگردان مدارس با زحمات طاقت فرسائی را تحمل میکنند ولی چون از میدان عمل و نتیجه بردن دورند وقتی از مدرسه بیرون آمدند مشتی عاجز ناتوانند که مطالبی درهم و برهم بخاطر دارند و بمرور زمان یک یک آنها را هم بدست فراموشی میدهند



هر کس باید تا آنجا که میتواند در رفع این نقص کوشش کند و فرزندان

این آب و خاک را از خطر بیچارگی و ناتوانی برهاند . راه عمل را بایشان نشان دهد و وسایل رسیدن بآنرا برای آنها آماده و مهیا سازد .

یکی از علومی که در مدارس ما بیشتر وقت عزیز شاگردان را مصروف میدارد و بواسطه دور بودن از عمل کمتر فایده میبخشد ریاضیات است و عجب در این است که کاملترین علوم ناقص ترین نتایج را میدهد . اصول ریاضی پایه و بنیان زندگانی کنونی دنیا است . هر علمی که باصول ریاضیات نزدیک شود راه تکمیل میپوید و چون تمام قواعد ریاضی در آن صدق نماید بدرجهٔ کمال رسیده است . پس مقیاس و معیار هر چیز تنها این علم شریف میباشد . محصلین بواسطه عملی ننمودن قضایا و قواعد ریاضی از رنج و زحمت خود سودی نمی برند با آنکه در ریاضیات راه عملی کردن علوم نظری بسیار سهل و ساده است و تقریباً منحصر بحل مسائل مختلفه میباشد

امروز در مملکت ما بدبختانه کتبی که فکر شاگردانرا بکار اندازد و سبب پیشرفت واقعی آنها شود نادر و کمیاب است زیرا ضیق وقت استادان محترم جامعه را از اینگونه وسائل بی نصیب کرده است لذا چون محصلین از مدرسه بیرون آمدند در قلیل مدتی خوانده ها را فراموش میکنند و از ناامیدی میگویند

ریاضیات بدرد نمیخورد .)) من بنده برای آنکه خدمتی را انجام داده باشم بر آن شدم که دوره کاملی در حل مسائل مختلفه ریاضی جمع آورم و به محصلینی که میخواهند از راه سعی و عمل نام بردار شوند تقدیم نمایم . ضمناً برای آنکه این دوره جامع باشد و کاملاً احتیاجات طالبان معرفت را رفع نماید در هر قسمت بمناسبت تعاریف و قضایا و قواعد لازمه اضافه گردیده و این دوره که شامل دو هزار و پانصد مسئله است وقتی با تعاریف دیگر اصول ریاضی جمع باشد دوره کاملی از ریاضیات خواهد بود که احتیاجات محصلین را بوجه اکمل رفع خواهد نمود .

در پایان هر فصل هم یک مسئله تفریحی طرح و حل شده است تا برای خوانندگان کسالت و ملالی ایجاد نشود .

در خاتمه اولاً لازم میدانم تشکرات خود را تقدیم دوست عزیزم آقای میرزا حسینعلی خان طهرانیان که بنده را بطبع این کتاب وادار داشته و از بذل هرگونه مساعدت و همراهی دریغ نفرموده اند بنمایم ثانیاً از دوست گرامی خودم آقای سید عبدالله خان ریاضی که در تالیف این کتاب بنده را ببعضی نکات لازمه متوجه ساخته اند تشکر مینمایم ثالثاً از ارباب بصیرت



و دانش تقاضا میکنم که هر جا سهو یا غلطی مشاهده فرمایند از نظر دور نداشته مستحضرم فرمایند تا در طبعهای آتیه در رفع آنها کوشیده کتابی منزه از اغلاط تقدیم جامعه نمایم .

بمنه و جوده و کرمه

(غلامحسین مصاحب)



بسمه تبارک و تعالی

فصل اوّل

اجرای اعمال اصلی بر اعداد و مقادیر جبری

۱ ــ در حل مسائلی مانند مسئله ذیل : دیروز در موقع غروب حرارت ۱۵ بود. امروز صبح ۱۸ کمتر شد. امروز صبح حرارت چند درجه است؟ و غیرها بمقادیر و اعدادی کمتر از صفر برمیخوریم این مقادیر و اعداد را منفی و اعداد بزرگتر از صفر را مثبت خوانند. برای تمیز اعداد مثبت از منفی مقدم بر اعداد نوع اوّل علامت + و مقدم بر اعداد نوع دوم علامت — را قرار میدهند و بنا بر این قرارداد از بین اعداد ۳+ و ۲- و $\frac{2}{5}$ و ۲٫۵ + دو عدد ۳ + و ۲٫۵ + مثبت و دو عدد دیگر منفی هستند از آنچه در ابتدا گفتیم معلوم میشود که اعدادیکه بدون علامت نوشته شوند مثبت اند چه این اعداد همانهائی هستند که در حساب دیده ایم و آنها همه از صفر بزرگتر بوده اند. اعداد مثبت و منفی را اعداد جبری و اعدادیرا که بدون علامت نوشته شوند اعداد حسابی خوانند وقتی از علامت عدد جبری مفروضی صرف نظر کنیم عدد حسابی حاصل میشود

که به قدر مطلق عدد جبری منفرد فرض موسوم است مثلاً قدر مطلق اعداد ۳+ و ۲/۵- ۳ و ۲/۵ است و آنها باین علامت نمایند :

|۳+| = ۳ ‏ ‏ ‏ ‏ |۲/۵-| = ۲/۵

(تلفظ کنید قدر مطلق ۳+ مساویست با ۳ وغیره)

۲ — در جبر و مقابله اعداد را بواسطهٔ حروف الفبا مینمایند و علائم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم همانهائی هستند که در حساب ذکر شده مثلاً $a+b$ مجموع دو عدد a و b ، و $\frac{a}{b}$ نمایش خارج قسمت a و b و بالاخره $x\times y$ نمایش حاصلضرب x و y است . (اغلب بجای × نقطه استعمال می‌کنند مثلاً $a.b$ بجای $a\times b$ و $a.b.c$ بجای $a\times b\times c$ نوشته میشود . بالاخره در مواقعی که اشتباهی روی ندهد نقطه را نیز حذف میکنند مثلاً بجای $a\times x$ ax و بجای $x\times y$ xy و بجای $7\times a$ $7a$ مینویسند)

۳ — وقتی بجای حروف عبارتی مقادیر عددی قرار دهیم و حاصل را مختصر کنیم عددی حاصل میشود که به مقدار عددی آن عبارت بازاء مقادیر مفروضه برای حروف موسوم است .



مسئله — مطلوبست مقدار عددی $2x$ بازاء $x=3$

حل ـ مقدار عددی $2x$ بازاء $x=3$ مساویست با: $2\times 3=6$

مسئله ـ مطلوبست مقدار عددی $x+a$ وقتی $x=3$ و $a=5$ باشد

حل ـ مقدار مطلوب مساویست با: $5+3=8$

مسئله ـ وقتی $x=3$ ، $y=9$ باشد $y:x$ چقدر است

حل ـ : $y:x=9:3=3$

مسئله ـ مطلوبست مقدار عددی عبارات ذیل بازاء $x=1$ و $a=5$ ، $c=0$ ، $b=8$ و $e=f=2$:

$2\times x$ ، $2\times a$ ، $a+x$ ، $e+f$ ، $b+c$ ، $a+b$

$x+f$ ، $b+f$ ، $3a$ ، $x+e$ ، $b-x$ ، $a-f$

$b-f$ ، ax ، ac ، ab ، af ، ae ، xb ، ef.

جواب بترتیب: ۲، ۱۰، ۶، ۴، ۸، ۱۳، ۳، ۱۰، ۱۵، ۳،

۷، ۳، ۶، ۵، ۰، ۴۰، ۱۰، ۱۰، ۸، ۴.

مسئله ـ مطلوبست: اولاً سطح مثلثی که قاعده‌اش b و ارتفاعش h باشد. ثانیاً سطح مربعی بضلع a ثالثاً محیط و سطح دایره‌ئی که شعاعش r باشد. رابعاً حجم مکعبی که طول خط الراسش a باشد خامساً سطح کرۀ شعاع r

جواب بترتیب $\frac{bh}{2}$ ، a^2 ، $2\pi r$ ، πr^2 ، a^3 ، $4\pi r^2$

مسئله ـ متحرکی در ثانیه v متر حرکت میکند پس از $\frac{1}{4}$ روز چقدر حرکت کرده؟

جواب $86400 \times v \times \frac{1}{4}$

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی $3 \cdot x^2$ بازاء $x=2$

حل ـ $3 \times x^2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی x^2+2x+1 بازاء $x=1$

حل ـ مقدار مطلوب مساویست با : $1^2+2\times 1+1 = 1+2+1 = 4$

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی هریک از عبارات ذیل بازاء $x=1$

$6x^2$ ، x^2+1 ، x^2-1 ، $3x+5$ ، $2x+1$ ، x^2+3

جواب بترتیب ۶ ، ۲ ، ۰ ، ۸ ، ۳ ، ۴ .

۴ ـ جمع اعداد جبری ـ بنا بر تعریف ، اولاً مجموع چند عدد جبری متحد العلامه عدد جبری است که قدر مطلقش مجموع قدر مطلقهای عوامل و علامتش علامت مشترک آنها باشد . ثانیاً مجموع دو عدد جبری مختلف العلامه عدد جبری است که قدر مطلقش تفاضل قدر مطلقهای عوامل و علامتش علامت عددی باشد که قدر مطلقش بزرگتر است . ثالثاً مجموع چند عدد جبری

عددی است که از جمع کردن مجموع دو عدد اول و دوم با عدد سوم و جمع کردن این مجموع با عدد چهارم و قس علیهذا الی آخر حاصل شود .

۱۵ ـ مسئله ـ تحقیق کنید که :

$(+۴)+(+۵)=۹$, $(-۳)+(-۴)=-۷$, $(+۱)+(-۳)=-۲$

$(\frac{۱}{۲})+(-\frac{۲}{۳})=-\frac{۱}{۶}$, $(+۷)+(-۳)=+۴$, $(-۱)+(+۱)=۰$

$(+۵)+(-۱۰)=-۵$, $(+۵)+(-۶)=-۱$, $(+a)+(-a)=۰$

$(+۷)+(-۳)+(-۲)+۳=+۵$, $۳+(-۲)+(۱۱)=۱۲$

$(+۶)+(-۵)+(-۱۶)+(۹)=-۶$, $(+a)+(+b)=a+b$

$(۴\frac{۱}{۲})+(\frac{۳}{۵})+(-۲\frac{۲}{۵})+(-۱\frac{۳}{۷})+(۲\frac{۸}{۳۵})=-\frac{۹}{۱۰}$

$(\frac{۵}{۶})+(-\frac{۵}{۱۲})+(-\frac{۷}{۱۰})+(-\frac{۳}{۲۰})+(\frac{۱۳}{۱۶})+(-\frac{۳}{۸})=\frac{۷۳}{۲۴۰}$

۵ ـ تفریق ـ برای تفریق کردن دو عدد جبری از یکدیگر کافی است علامت مفروق را تغییر داده آنرا با مفروق منه جمع نمائیم .

مسئله ـ مطلوب است تفاضل ۳ + و ۲ −

حل ـ بنا بر قاعده فوق : $(+۳)-(-۲)=(+۳)+(+۲)=+۵$

مسئله ـ مطلوب است مقدار : $(+۶)-(-۱)$, $(-۹)-(-۲)$

۷ − (−۲) ، (+۷) − (+۵) ، (−۷) − (+۱۳) و (−۷) − (+۳) و

(−۱) − (−۱) و (−a) − (−b) ، (−a) − (+b) ، (−a) − (+۳)

جواب بترتیب : ۷ و ۱- و ۹ و ۲ و ۲۰- و ۱۰- و ۵ و b−a

و −(a+b) و −(a+۳)

۶ ـ مجموع جبری ـ مجموع جبری رشته ایست از اعداد که با علامت + یا − از هم جدا شده باشند مثل ۱ − ۲ + ۳ − ۷ و (۱) + (−۳) + (۳/۴) − (۲/۳ +) و غیره

برای مختصر کردن یک مجموع جبری عوامل جمع را با هم و عوامل تفریق را با هم جمع نموده حاصل ثانی را از حاصل اول میکاهیم

مسئله ـ عبارت ۹ − ۳ + ۶ − ۷ − ۲ − ۳ − ۴ را مختصر کنید

حل ـ عوامل جمع عبارتند از ۴ و ۶ و ۳ و عوامل تفریق عبارتند از ۳ و ۲ و ۷ و ۹ خلاصه ۱۳ = ۳ + ۶ + ۴ و ۲۱ = ۹ + ۷ + ۲ + ۳ پس عبارت مفروض مساویست با : ۸− = ۲۱ − ۱۳

مسئله ـ عبارت (−۱) − (+۲) − (−۳) + (+۱) + (+۳) − (+۱/۲) را مختصر نمائید

حل ـ عوامل جمع عبارتند از ۱/۲ ، ۱ و ۳− و عوامل تفریق عبارتند از +۳ ، +۲ ، −۱ خلاصه (۱/۲) + ۱ + (−۳) = −۱/۵

پس مقدار عبارت مفروض مساویست با : (+۳) + (۲) + (-۱) = ۴

(-۱,۵) - (۴) = -۵,۵

مسئله ـ عبارات ذیل را مختصر کنید :

اولاً ۱۲ - ۴ - ۱۲ + ۴۴ + ۳۲ + ۳۴ - ۶۴ ـ ثانیاً ۳/۲ - ۱/۶ - ۱/۲ ـ ثالثاً ۱۱ + ۲ + ۱ -

رابعاً ۱۲۰ + ۱ + ۴ - ۱۸ + ۱۰ - ۳ خامساً ۱۰۰ - ۱۶ + ۶۰۰ + ۶۲۵ + ۱۶۰ -

سادساً ۱ + ۶۴ + ۲۲۵ - ۲۷ - سابعاً ۳ - ۴ + ۳ - ۴ + ۱ - ۲ + ۱

ثامناً ۵ - ۶ + ۴ - ۵ + ۳ - ۴ + ۲ - ۳ + ۱ - ۲ + ۱

جواب بترتیب : صفر و ۱۳/۶ - و ۱۲، ۱۱۸ و ۸۱ و ۱۸۷ - و ۴ و ۶.

مسئله ـ عبارات ذیل را مختصر کنید :

۴ - (-۲) - (-۳) + ۶ - ۱۲ - ۷ - ۶ - ۱۲ - ۷ - ۵ + ۱

۱۳ - ۱۲ + ۱۱ - ۱۰ + ۹ - ۸ + ۷ - ۶ + ۵ - ۴ + ۳ - ۲

۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱

جواب بترتیب ۲۴ - و ۶ - و ۵

مسئله ـ مطلوب است مقدار $x^2 - 2x - 8$ وقتی x مساوی صفر یا

۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ گردد



جواب بترتیب : ‎-۸۰ ، ‎-۸۱ ، ‎-۸۰ ، ‎-۷۷ ، ‎-۷۲ ، ‎-۶۵ ، ‎-۵۶ ، ‎-۴۵

، ‎-۳۲ ، ‎-۱۷ ، ~~‎-۱۷~~ ، ۵ ، ۱۹ ، ۴۰ .

۷ـ **ضرب** ـ اولاً حاصل ضرب دو عدد متحد العلامه (یا مختلف العلامه) عددی است مثبت (یا منفی) که قدر مطلقش حاصل ضرب قدر مطلقهای عوامل باشد ثانیاً برای ضرب کردن چند عدد در یکدیگر کافی است که عدد اول را در عدد دوم ضرب نموده و حاصل ضرب را در عدد سوم ضرب کنیم و قس علیهذا الی آخره .

مسئله ـ مطلوبست مقدار (+۲).(+۴) ، (-۶).(+۲) ، (+۳).(-۵)

، (+۳).(-۵) ، (-۳).(-۸) ، (+a)(b) ، (-۴)(x) ، (-x).(y)

، (-۱).(-۱) ، (-a).(-x) ، (-۳).(-۲).(-۱) ، (-۲).(۲/۳).(-۱۵/۹)

، (-x) ، (-۱)(-۲)(۳)(-۴) ، ۴(-۲/۳)(-۶/۸) ، (-a/b)(-۲/۳)(-c/a)x

، (b/a)(a/c)(-۱۵/۱۰) ، (-۱۵/۲۳)(۲۸/۹۱)(-۳۲/۱۲۰)(۱۴/۲۵)(-۵۲/۷۷)(۴۰/۶۱)

جواب بترتیب : ۸ ، ‎-۱۲ ، ‎-۱۵ ، ۲۴ ، ab ، ‎-۴x ، ‎-xy ، ۱ ، ax ،

‎-۶ ، ۱۰ ، ۲۴x ، ۲ ، ۱ ، ‎-۵۹۲/۴۳۶۱۵

مسئله ـ مطلوب است حاصلضرب چند عامل که یکی از آنها صفر باشد

(جواب : صفحه)

۸ – قوه – حاصل ضرب n عامل مساوی با عدد a را قوه n ام آنعدد خوانند و آنرا بعلامت a^n مینمایند مثلاً قوه پنجم ۲ عبارت است از $2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$ و قوه سوم ۵– مساوی است با:

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$$

مسئله – مطلوب است مقدار $(-1)^{11}$ ، $(-1)^{10}$ ، 3^2 ، $(-2)^9$ ، $(-1)^9$ ، $(-5)^2$ ، 8^4 ، $(-7)^5$ ، $(-5)^4$ ، $(-9)^5$ ، $(-3)^9$ ، $(-3)\times 2^2$ و $(-5)^3 \times 2^2$ ، $(-2)^3 \times (-6)^2$ ، $(-3)^2 \times (-1)^5$ ، $(-2)^3 . (-5)^2$

جواب بترتیب : ۱– ، ۱ ، ۹ ، ۵۱۲– ، ۱– ، ۲۵ ، ۴۰۹۶ ، ۱۶۸۰۷– ، ۶۲۵ ، ۵۹۰۴۹– ، ۱۹۶۸۳– ، ۱۲– ، ۵۰۰– ، ۲۸۸– ، ۹– و ۲۰۰–

مسئله – تحقیق کنید که : $2\times3^2 + 3\times2^2 + 2^4\times3^3 - 2\times3\times7\times10 = 0$

حل – بدیهی است که $2\times3^2 = 2\times9 = 18$ ، $3\times2^2 = 3\times4 = 12$

$2^4\times3^3 = 432$ ، $2\times3\times7\times10 = 462$ پس مقدار طرف اول مساوی است با:

$$18+12+432-462 = 462-462 = 0$$



مسئله – مطلوب است مقدار عددی $A=x^2(y-z)^3+y^3(x-z)^3$

به ازاء $x=2$ ، $y=1$ ، $z=-1$

حل – $A=2^2\times[1-(-1)]^3+1^3\times[2-(-1)]^3=$

$=4\times2^3+3^3=4\times8+27=32+27=59$

مسئله – مطلوب است مقدار عددی $(a+b)^2-a^2-2ab-b^2$

اولاً به ازاء $a=1$ ، $b=2$ ثانیاً به ازاء $a=3$ ، $b=4$ ثالثاً به ازاء

$a=-1$ ، $b=1$ رابعاً به ازاء $a=-4$ ، $b=-2$ خامساً به ازاء $a=-2.5$ ، $b=-6$

جواب : در هر حالت مقدار مطلوب صفر است

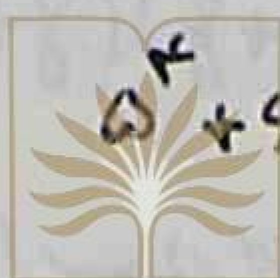
مسئله – مطلوب است مقدار عددی $a^3(a+b)^3-a^6-a^3b^3-3a^5b-3a^4b^2$

اولاً به ازاء $a=-2$ ، $b=-3$ ثانیاً به ازاء $a=-5$ ، $b=4.5$

جواب : در هر دو حالت صفر است .

مسئله – تحقیق کنید که

$0.065^2-10\times0.065\times0.0005+25\times0.0005^2=0.004525$



$5^4+6\times5^2\times2^2+2^4-4\times5^3\times2-4\times5\times2^3=81$

$-(16+36)^2+(16-36)^2+4\times16\times36=0$

$$-(9+25)^2+(9-25)^2+4\times9\times25=0$$

$$(-1)^3+2(-1)^2+11-12=0$$

$$(-4)^3+7(-4)^2+44=92$$

$$3\times3^2+2\times3^2-3\times11-12=0$$

$$2(-2)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)+(5-4-3)^2+1=12$$

$$(-3)^2-(5\times3)^2-(-4)^3+\left(\frac{15}{5^2\cdot3^2}\right)^2\times15^2=-151$$

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی $6x^5-29x^4+27x^3+27x^2-29x+6$

بازاء -1 یا 3 یا 0 یا 2 یا $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}=x$

و در هر حالت جواب صفر است مگر بازاء $x=0$ که جواب ۶ میباشد)

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی x^3-x-10 بازاء $x=-5$ و $x=-4$

$x=0$ و $x=2$ و $x=-3$ ، $x=-2$ ، $x=-1$ و $x=1$

جواب بترتیب : -130 و -70 ، -10 ، -4 ، -34 و -16 و -10 و -10

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی عبارت ذیل اولاً بازاء $x=-1$ و $y=3$ و $z=0$

ثانیاً بازاء $x=-\frac{2}{3}$ و $y=-6$ و $z=4$ ثالثاً بازاء $x=0$ و $y=2$ ، $z=-\frac{1}{10}$

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$$

جواب در هر حالت صفر است .



۹- جذر - جذر هر عدد مانند a عددی است مانند x بقسمی که $x^2 = a$ باشد اعداد مثبت دو جذر دارند مثلاً جذرهای ۱۶ ، ۴+ یا ۴- است زیرا: $(+4)^2 = 16$ و $(-4)^2 = 16$ ولی اعداد منفی جذر ندارند. جذر هر عدد مانند a را باینصورت مینمایند: $\sqrt{a}$.

برای تعیین جذر کسر کافی است جذر صورت را بجذر مخرج تقسیم کنیم مثلاً

$$\sqrt{\frac{9}{144}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{144}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

مسئله - مطلوبست جذر ۱۴ و ۱۱٫۲ و ۴ ، ۸۱۰۰ ، ۱۱۹ ، ۲ و ۱۱ و ۹ و ۸

جواب بترتیب: ± 3.7 و ± 1.4 و ± 2 و ± 90 و ± 10.9 و ± 1.4 و ± 3.3 و ± 3 و ± 2.8

۱۰- واضحست که اگر جذر عددی را بقوهٔ دوم برسانیم یعنی مجذور کنیم آنعدد حاصل میشود یعنی $(\sqrt{a})^2 = a$ یا $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

مسئله - مطلوبست مقدار $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ ، $(\sqrt{3})(-\sqrt{3})$ و $\sqrt{9.5}\cdot\sqrt{9.5}$ و $(\sqrt{31})^2$ ، $(\sqrt{8})^2$ ، $\sqrt{1}$ ، $(\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{3}$ و $2(\sqrt{2})(-\sqrt{2})$ و $-5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$

جواب بترتیب: ۲ ، ۳- و ۹٫۵ و ۳۱ و ۸ و ±۱ و ۱ و ۴- و ۲۵-

مسئله - مطلوبست مقدار: $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

حل - واضح است که $\sqrt{3} = 1,732$ پس $x = \frac{1,732+1}{1,732-1} = \frac{2,732}{0,732} = 3,7..$

مسئله - مطلوب است مقدار $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ (جواب ۰٫۲۸)

مسئله - حساب کنید مقدار $x = \frac{3}{7-4\sqrt{3}}$ را

حل - چون $\sqrt{3} = 1,732$ پس : $x = \frac{3}{7-4\times 1,732} = 41,800...$

مسئله - مطلوبست مقدار $x = \sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}$ بازاء $a=6$ ، $b=8$

حل - $x = \sqrt{6+\sqrt{6^2+8^2}} = \sqrt{6+\sqrt{36+64}}$

$= \sqrt{6+\sqrt{100}} = \sqrt{6+10} = \sqrt{16} = 4$

۳- مسئله - مطلوب است اولاً مقدار $\sqrt{\sqrt{10}}$ ثانیاً مقدار $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

جواب ۱٫۷۷ ، ۱٫۲۷۲

مسئله - بنا بر آنکه $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=3$ ، $d=-4$ باشد مقدار عددی

$x = \sqrt{d^2-4b+a^2} - \sqrt{c^3+b^3+a+d}$ چقدر است ؟

حل - $x = \sqrt{16+8+1} - \sqrt{27-8+1-4} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 1$

مسئله - مطلوب است مقدار عبارت ذیل بازاء $a=13$ ، $b=14$ ، $c=15$

$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)}$

(جواب ۸۴)

مسئله _ مطلوب است مقدار عبارت ذیل اوّلاً بازاء $a=۱$, $b=-۲$

ثانیاً بازاء $a=-۳$, $b=-۵$ ثالثاً بازاء $a=۲$, $b=-\frac{۱}{۲}$

$$\sqrt{\sqrt{a^۴+۴a^۳b+۶a^۲b^۲+۴ab^۳+b^۴}}-\sqrt{a^۲+۲ab+b^۲}$$

جواب در هر حالت صفراست

مسئله _ مطلوب است محاسبه $\sqrt{\sqrt{۲۳۱۳۴۴۱}}$ ، $\sqrt{\sqrt{\sqrt{۳۹۰۶۲۵}}}$

و $\sqrt{\sqrt{\sqrt{۲۰۸۸۲۷۰۶۴۵۷۶}}}$

جواب بترتیب ۳۹ ، ۵ و ۲۶

مسئله _ مطلوب مقدار عددی $\sqrt{\sqrt{(x^۲+y^۲)^۲-(x^۲-y^۲)^۲}}-\sqrt{۲xy}$

اوّلاً بازاء $x=y=۰$ ثانیاً بازاء $x=y=-۶$ ثالثاً بازاء $x=۱٫۵$

$y=-۵$ رابعاً بازاء $x=۷$ و $y=-۱$ خامساً بازاء $x=-۱$ و $y=۱۰$

(جواب در هر حالت صفراست)

۱۲۰ _ مقصود از تقسیم کردن a (مقسوم) بر عدد b (مقسومٌ علیه) تعیین عددی است مثل c (خارج قسمت) که چون در b ضرب شود a حاصل گردد از قاعدهٔ ضرب معلوم میشود که اگر a و b متحد العلامه باشند c مثبت والّا منفی است بقسمی که میتوان گفت که : خارج قسمت دو عدد جبری متحد العلامه



(یا مختلف العلامه) عددی است مثبت (یا منفی) که قدر مطلقش خارج قسمت قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه باشد مثلاً $\frac{+3}{-2} = -(\frac{3}{2}) = -1{,}5$

و $\frac{-3}{-6} = +(\frac{3}{6}) = +\frac{1}{2}$ و $\frac{-a}{+b} = -(\frac{a}{b})$

مسئله ـ مطلوب است مقدار $\frac{+4}{+1}$ و $\frac{-4}{-2}$ و $\frac{-8}{3}$ و $\frac{9}{-6}$ و $\frac{+a}{-b}$

و $\frac{-a}{-b}$ و $\frac{+a}{+b}$ و $\frac{-1}{+1}$ و $\frac{+5}{4}$ و $\frac{3}{(-2)^2}$ و $\frac{-6}{(-5)^3}$

جواب بترتیب: ۴ و ۲ و $-\frac{8}{3}$ و $-\frac{3}{2}$ و $-\frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ و -1

و $+\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{4}$ و $+\frac{6}{125}$

مسئله ـ مطلوبست مقدار کسر $\frac{-a^2+2ab}{3a}$ بازاء $a=9$ و $b=1$

حل ـ مقدار مطلوب مساویست با: $\frac{-9^2+2\times9\times1}{3\times9} = \frac{18-81}{27} = \frac{7}{3}$

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5}$ اولاً بازاء $x=3$

ثانیاً بازاء $x=0$ (جواب $-\frac{1}{2}$ و -2)

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی کسر $\frac{(a-b)^2}{a^2-2ab+b^2}$ اولاً بازاء

$a=0$ و $b=1$ ثانیاً بازاء $a=-2$ و $b=3$ ثالثاً بازاء $a=0{,}5$ و

$b=3{,}2$ رابعاً بازاء $a=1{,}2$ و $b=-3{,}2$ (در هر حالت جواب یک است)

مسئله ـ اگر $x_1=9{,}5$ و $a=-8$ و $b=-14$ باشد مقدار $\frac{x_1^2-b}{2x_1+a}$

چقدر است؟ (جواب ۹,۴۷)

مسئله ـ مطلوب است مقدار کسر : $\frac{a-b}{b-a}$ اولاً بازاء $a=+\frac{2}{3}$ ، $b=$
$\frac{3}{7}$ ـ ثانیاً بازاء $a=-6$ ، $b=5$ ثالثاً بازاء $a=0$ ، $b=7$

(جواب در هر حالت منهای یک است)

مسئله ـ مطلوب است مقدار عبارت ذیل اولاً بازاء $c=-3$ ، $b=-5$
$a=-1$ ثانیاً بازاء $a=-2$ ، $b=0$ ، $c=2$ ثالثاً بازاء $a=4$ ، $b=-1$ ، $c=-5$

رابعاً بازاء $a=-\frac{1}{2}$ ، $b=-\frac{1}{3}$ ، $c=\frac{1}{4}$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

جواب در هر حالت صفر است)

مسئله ـ مطلوب است مقدار $\sqrt{a^2+2ab+b^2}-\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$

اولاً بازاء $a=-1$ ، $b=-5$ ثانیاً بازاء $a=-6$ ، $b=-2,5$

ثالثاً بازاء $a=0$ ، $b=-\frac{6}{7}$ (جواب صفر)

مسئله ـ مطلوب است مقدار کسر $\frac{x^7-6x^6+3x^3-5x^9+3x^2+x}{x^4-4x^2+5x+a}$

بازاء $x=0$ ، $a=1$ (جواب صفر)

مسئله ـ مطلوب است مقدار عبارت $\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$

بازاء $x=3$ ، $x=-2,5$ ، $x=-\frac{2}{5}$ ، $x=-7,1$ ، $x=3$

جواب صفر است

مسئله — حساب کنید مقدار $pxy+\frac{2y}{p-y}+2q$ را بازاء $x=3$

$y=4$ ، $p=8$ ، $q=10$ (جواب ۱۱۸)

مسئله — مطلوب است مقدار عددی $\sqrt{3xy}+\sqrt{5xz}+\sqrt{3vy}$ بازاء

$x=1$ ، $y=3$ ، $z=5$ ، $v=0$ (جواب ۸)

مسئله — مطلوبست مقدار عددی $\frac{2a+b(2c-a)}{3b-\sqrt{2c^3}}$ بازاء $a=4$ ، $b=3$ ، $c=2$

حل — مقدار مطلوب مساویست با: $\frac{8+3\times0}{9-4}=\frac{8}{5}$

مسئله — مطلوب است مقدار $a+[b-2c-(a-b)]$ بازاء $a=2$ ، $b=-1$ ، $c=3$

حل — $2+[-1-6-(2+1)]=2+[-1-6-3]=2-10=-8$

مسئله — مطلوبست مقدار عبارت ذیل اولاً بازاء $a=3$ ، $b=-2$ ثانیاً

بازاء $a=-1$ ، $b=0$ ثالثاً بازاء $a=-1$ ، $b=-5$ رابعاً بازاء $a=-\frac{1}{2}$ ، $b=-\frac{1}{2}$

$$2a+[3b-6b+(3b-2a)]+(a+b)^2-a^2-2ab-b^2$$

(جواب در هر حالت صفر است)



مسئله — مطلوب است مقدار عددی عبارت ذیل اولاً بازاء $a=1$

q=- ثانیاً بازاء $p=-3,5$ ، $q=-2,5$: $\dfrac{p^2+q^2-(p-q)\sqrt{p^2+2pq+q^2}}{2p+q-[p-(q-p)]}$

جواب اولاً $\frac{1}{2}$ ثانیاً ۲,۵-

مسئله - تحقیق کنید که اگر $a=\frac{25}{16}$ ، $b=1$ ، $c=\frac{3}{4}$ باشد ؛

$$(a-\sqrt{b})(\sqrt{a}+b)\sqrt{a-b}=\frac{3c^4}{\sqrt{a-c^2}}$$

۱۳- کعب - کعب یا قوه سوم هر عدد مانند a عددی است مثل x بقسمی که $x^3=a$ (۱) باشد عدد x را باینصورت مینمایند $x=\sqrt[3]{a}$ (۲)

مثلاً $\sqrt[3]{125}=+5$ زیرا $(+5)^3=125$ و $\sqrt[3]{-125}=-5$ چو $(-5)^3=-125$

اگر طرفین رابطه (۲) را مکعب کنیم حاصل میشود $x^3=(\sqrt[3]{a})^3$ یا : $a=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=(\sqrt[3]{a})^3$ برای تعیین کعب یک کسر کافی است کعب صورت را بکعب مخرج تقسیم کنیم مثلاً $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$

مسئله - مطلوب است کعب اعداد ۸ ، ۳ ، ۲- ، ۱۹۰ ، ۱- ، ۸- ، ۶,۲۹ ، ۴۱

جواب بترتیب ۲ ، ۱,۴۴ ، ۱,۲۵۹- ، ۵,۷۴ ، ۱- ، ۲- ، ۱,۸۴ ، ۳,۴۴

مسئله - مطلوب است اولاً محاسبه $\sqrt[3]{-994011992}+\sqrt[3]{977002999}$

ثانیاً محاسبه $\sqrt[3]{843908625}+\sqrt[3]{-60335125}-(\sqrt[3]{100})^3$

(جواب بترتیب ۱ و صفر)

مسئله ـ مطلوب است محاسبه : اولاً $\sqrt[3]{\sqrt{4826809}}$ ثانیاً $\sqrt[3]{\frac{23}{755865}}$

ثالثاً $\frac{(-0{,}0239)\cdot\sqrt[3]{41{,}3}\times(0{,}2)^7}{(42{,}3)^2}$ رابعاً $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{0{,}1234}}}$

خامساً $\frac{\sqrt[3]{0{,}729}+\sqrt[3]{3{,}375}}{0{,}002\times 0{,}00012}$ سادساً $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{208827064576}}}}$

جواب بترتیب ۱۳ و ۰٫۰۶۸ و ۰٫۸۴ و $-\frac{5909}{10^{13}}$ و 10^{7} و ۲٫۹۶

مسئله ـ مطلوبست مقدار عددی $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ اولاً بازاء $a=-1$ و $b=3$

ثانیاً بازاء $a=-5$ ، $b=-6$ ثالثاً بازاء $a=-2{,}5$ ، $b=-4{,}5$

جواب بترتیب: ۲ و ۱۱– و ۷–

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}-\sqrt[3]{(a+b)^3}$

اولاً بازاء $a=-1$ و $b=2$ ثانیاً بازاء $a=4$ و $b=-1$ ثالثاً بازاء $a=-5$ و

$b=-6$ (جواب صفر)

مسئله ـ اگر $a=5$ و $b=4$ ، $c=3$ باشد مقدار عبارت ذیل

چقدر است $x=\sqrt[3]{6abc+(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-(a+b+c)^3}$

(جواب ۶)

مسئله ـ مطلوب است مقدار عددی $x=(3abc-2bcd)\sqrt[3]{a^3bc-c^3bd}+$

بازاء $a=0$, $b=1$, $c=-2b$, $d=b-c$

حل - واضحست که $c=-2\times1=-2$, $d=1-(-2)=3$ پس

$$x=\left[2\times0\times1\times(-2)-2\times1\times(-2)\times3\right]\cdot\sqrt[3]{0\times1\times(-2)-(-2)^3\times1\times3+3}$$

$$=\left[0+12\right]\cdot\sqrt[3]{24+3}=12\times3=36.$$

مسئله - مطلوبست مقدار عددی $x=\dfrac{a^b+b^c+c^d}{b^a+c^b+d^c+(a+b)(b+c)}+3(a^a+b^b+c^c)\times\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

$d=4$, $c=3$, $b=2$, $a=1$

حل - $x=\dfrac{1^2+2^3+3^4}{2^1+3^2+4^3+3\times5}+3(1^1+2^2+3^3)\times\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

$$=\frac{1+8+81}{2+9+64+15}+3\times(1+4+27)\times\frac{11}{6}=177.$$

مسئله - حساب کنید مقدار $\sqrt{(x^2+y^2-z)(x-y-3z)}:\sqrt[3]{xy^2z^2}$

را بازاء $x=-1$, $y=-3$, $z=1$

(جواب $\frac{5}{3}$)

مسئله - مطلوبست مقدار $\sqrt[3]{4c^2-a(a-2b-d)}-\sqrt[3]{b^4c+11b^3d}$ بازاء

$d=-1$, $c=\frac{3}{2}$, $b=-2$, $a=4$ (جواب -7)

مسئله - ثابت کنید که:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$



برهان - بنا بر تعریف: $a^m = \overbrace{a.a.a\ldots\ldots}^{m \text{ مرتبه}}$

و $a^n = \overbrace{a.a.a\ldots\ldots}^{n \text{ مرتبه}}$ پس:

$$a^m . a^n = \overbrace{a.a.a\ldots\ldots}^{m+n \text{ مرتبه}} = a^{m+n}$$

مسئله - ثابت کنید که: $(a^m)^n = a^{mn}$

برهان - $(a^m)^n = \overbrace{a^m . a^m \ldots\ldots a^m}^{n \text{ مرتبه}} =$

$$a^{m+m+\ldots\ldots} = a^{nm}.$$

مسئله - ثابت کنید که: $(ab)^m = a^m b^m$

برهان - $(ab)^m = \overbrace{(ab).(ab)\ldots\ldots}^{m \text{ مرتبه}}$

$$= \overbrace{a.a.a\ldots\ldots}^{m \text{ مرتبه}} \times \underbrace{b.b.b\ldots}_{m \text{ مرتبه}} = a^m . b^m$$

مسئله - مطلوب است مقدار $(\sqrt{۲}.\sqrt{۶})^۲$

حل - بنا بر مسئله فوق $(\sqrt{۲}.\sqrt{۶})^۲ = (\sqrt{۲})^۲ \times (\sqrt{۶})^۲ = ۲\times۶ = ۱۲$

مسئله - مطلوب است مقدار $(\sqrt{۲}.\sqrt{۵})^۲$ و $(\sqrt[۳]{۵}.\sqrt[۳]{\frac{۱}{۵}})^۳$

و $(\sqrt{۷}.\sqrt{۲})^۲ \times (\sqrt[۳]{\frac{۱}{۷}}.\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}})^۳$ و $(\sqrt{۲}.\sqrt{۵}.\sqrt{۱۷}.\sqrt{\frac{۱}{۱۷۰}}.\sqrt{۱})^۲$

جواب بترتیب: ۱۰، ۱، ۱، ۱

مسئله - ثابت کنید که $(abcd)^n = a^n.b^n.c^n.d^n$ باشد

مسئله ـ ثابت کنید که اگر $m>n$ باشد $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ و اگر $m<n$ باشد $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$

مسئله ـ مطلوب است مقدار a^0 و a^{-n}

حل ـ اولاً از تساوی $a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$ نتیجه میشود $a^0=\frac{a^n}{a^n}=1$

ثانیاً از تساوی $a^{-n}\cdot a^n=a^0=1$ حاصل میشود: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

مسئله ـ مطلوب است مقدار $\frac{a^5}{a^8}$ ، $\frac{3}{3^{-1}}$ و $\frac{1}{2^{-2}}$ و $\frac{1}{(0,3)^3}$

جواب: a^{-3} ، ۹ ، ۴ و ۰٫۰۲۷

مسئله ـ مطلوب است مقدار $a=-4\times6^{-2}+3^{-2}+1^0-2^1+8^0$

حل ـ $a=-4\times\frac{1}{6^2}+\frac{1}{3^2}+1-2+1=0$

مسئله ـ مطلوب است مقدار $5^0-5^{-2}+3^0$ ، $4^0:100^0$ و $\frac{a^2}{a^0-b^0+a^2}$

و $a^0+2b^1+b^0-\frac{2b^5}{b^4}$ ، $5^2-3^1-9^0-1^0+\frac{1}{-3}$

و $b^2+b+b^0-1-\frac{b^4}{b^3}$ ، $(a+b+c)^0-a^0-b^0-c^0$

جواب بترتیب: ۱٫۹ ، ۱ ، ۱ ، ۲ ، $\frac{59}{3}$ ، b^2 ، ۲−

مسئله ـ مطلوب است مقدار $x^{\frac{1}{2}}$

حل ـ فرض کنیم $y=x^{\frac{1}{2}}$ باشد نتیجه میشود: $y^2=(x^{\frac{1}{2}})^2=x^1=x$ پس $y=\sqrt{x}$ و از آنجا $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$



مسئله – ثابت کنید که : $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

مسئله – مطلوب است مقدار : $9^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{3}}$ ، $16^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{3}}$ ، $275^{\frac{1}{2}}$

جواب بترتیب ۱ ، ۸ ، ۶/۵

مسئله – مطلوب است مقدار $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$

حل – $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{36}}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$

مسئله – مطلوب است مقدار عددی عبارت ذیل بازاء $a=8$ ، $b=1$

$$A = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} - \frac{2}{a^0} + 512^{\frac{1}{3}}$$

حل – $A = \sqrt[3]{8} - \frac{2}{1} + \sqrt[3]{512} = 2 - 2 + 8 = 8.$

مسئله – مطلوب است مقدار $P = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

حل – $P = \frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{1}{81}} \times \frac{1}{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{2}$

$= 81 \times 4 \times \frac{1}{2} = 162$

مسئله – حساب کنید مقدار $81^{-\frac{1}{4}}$ ، $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ، $\frac{x^2 \times x^7}{x^3 \times x^6}$

جواب بترتیب : $\frac{1}{9}$ ، ۱ ، $-\frac{2}{3}$ ، ۱



۱۴ – ریشه n ام – ریشه n ام هر عدد مانند a عددیست

مانند x بقسمی که $x^n = a$ باشد. عدد x را به علامت $\sqrt[n]{a}$ مینمایند

بسهولت معلوم میشود که $(\sqrt[n]{a})^n = a$

اگر n زوج باشد x^n همیشه مثبت است و بنابراین a نیز مثبت میباشد

و بعلاوه در اینصورت دو مقدار برای x پیدا میشود که در رابطه $x^n = a$

صدق کنند و از اینرو معلوم میشود که اولاً مقادیر منفی ریشه زوج ندارند.

و ثانیاً هر مقدار مثبت دو ریشه زوج دارد

مسئله – ثابت کنید که

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad , \quad a^{-۳} = \frac{1}{a^{۳}} \quad , \quad \sqrt[۵]{۷} = ۷^{\frac{1}{۵}}$$

مسئله – مطلوب است مقدار $x = \left(۴^{-\frac{1}{۵}}\right)^{\frac{۵}{۲}}$

حل –

$$x = ۴^{-\frac{1}{۵} \times \frac{۵}{۲}} = ۴^{-\frac{1}{۲}} = \frac{1}{۴^{\frac{1}{۲}}} = \frac{1}{\sqrt{۴}} = \frac{1}{۲}$$

مسئله – تحقیق کنید که

$$(\sqrt[۴]{۳})^{۸} = ۹ \quad , \quad \frac{x^{۲} \times x^{۷}}{x^{۳} \times x^{۶}} = 1 \quad , \quad \left(۲^{\frac{1}{۲}}\right)^{-۲} = \frac{1}{۲}$$

مسئله – ثابت کنید که $\sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

اثبات. $\sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} . y^{\frac{1}{n}} =$

$$(xy)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{xy} .$$



تحویل دو یا چند رادیکال بیک نماینده

واضحست که :

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{a^{\frac{p}{n}}}$ و $\sqrt[m]{b} = \sqrt[p]{b^{\frac{p}{m}}}$

از این دستورات معلوم میشود که همواره دو یا چند رادیکال را میتوان بیک نماینده تحویل کرد. معمولاً برای عدد p کوچکترین مضرب مشترک اعداد n ، m وغیره را انتخاب میکنند مثلاً فرض کنیم مقصود تحویل رادیکالهای $\sqrt[6]{a}$ و $\sqrt[16]{b}$ و $\sqrt[9]{c}$ بیک نماینده باشد. کم اعداد ۶ و ۱۶ و ۹ عبارتست از ۱۴۴

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[144]{a^{\frac{144}{6}}} = \sqrt[144]{a^{24}}$$

و $\sqrt[16]{b} = \sqrt[144]{b^{9}}$ و $\sqrt[9]{c} = \sqrt[144]{c^{16}}$

برای ضرب کردن دو یا چند رادیکال که نمایندهایشان مختلف باشد ابتدا آنها را بیک نماینده تحویل نموده بعد عمل را مجری میسازیم مثلاً برای ضرب کردن $\sqrt{a}$ و $\sqrt[3]{b}$ چون ملاحظه کنیم که :

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^{3}} \quad , \quad \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b^{2}}$$

حاصل میشود :

$$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^{3}} \times \sqrt[6]{b^{2}} = \sqrt[6]{a^{3}b^{2}}$$

۱۱ مسئله مستقیماً ثابت کنید که :

$\sqrt{۳,۲}\cdot\sqrt{۵}=\pm۴$ ، $\sqrt[۳]{۷}\cdot\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۳]{۲۱}$ ، $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$

$\sqrt[۵]{a^۲}\cdot\sqrt[۵]{a^۳}=a$ ، $\sqrt{۸}\cdot\sqrt{۲}=\pm۴$ ، $۵\sqrt{a}\times۲\sqrt{۳}=۱۰\sqrt{۳a}$

$\sqrt[۳]{۶۴}\times\sqrt[۳]{۸}=۸$ ، $\sqrt[۳]{a^۲}\cdot\sqrt[۳]{a}=a$ ، $\sqrt[n]{a^{n-1}}\cdot\sqrt[n]{a}=a$

$۳\sqrt{۳}\times۲\sqrt{۲}=۶\sqrt{۶}$ ، $(\sqrt{۲})^۲+\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۳۶}$

مسئله ـ ثابت کنید که $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\sqrt[n]{d}\sqrt[n]{e}=\sqrt[n]{abcde}$

مسئله تحقیق کنید که $\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۳}\cdot\sqrt{۶}=۶$

مسئله حساب کنید مقدار $x=\sqrt{\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۳}\cdot\sqrt{۵}\cdot\sqrt{۶}\cdot\sqrt{۷,۲}}$ را

حل ـ $x=\sqrt{\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۳}\cdot\sqrt{۶}\cdot\sqrt{۵}\cdot\sqrt{۷,۲}}=\sqrt{\sqrt{۳۶}\cdot\sqrt{۳۶}}$

$\sqrt{۳۶}\cdot\sqrt{۳۶}=۳۶$ پس $x=\sqrt{۳۶}=\pm۶$

مسئله ـ تحقیق کنید که

$\sqrt{۳}\cdot\sqrt{۴}\cdot\sqrt{۵}\cdot\sqrt{۶}\cdot\sqrt{\frac{۱}{۱۰}}=\pm۶$ ، $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{۱}{ab}}=۱$

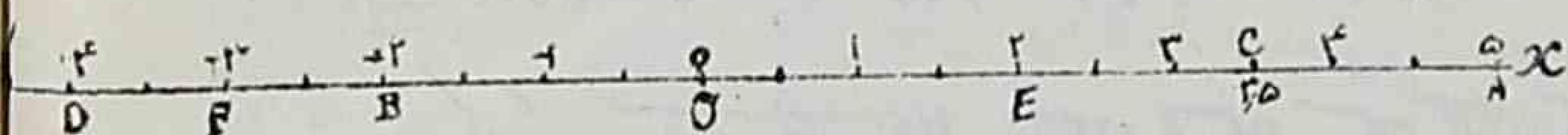
$\sqrt{۵}\times\sqrt{۵۰}\times\sqrt{۱۰}=\pm۵۰$ ، $\sqrt[۳]{۲}\cdot\sqrt[۳]{۳}\cdot\sqrt[۳]{۶^۲}\cdot\sqrt[۳]{۱}=۶$

$\sqrt{\sqrt[۳]{۳۶^۲}\cdot\sqrt[۳]{۶}\cdot\sqrt[۳]{۶\times۲^۰}}=\pm۶$ ، $\sqrt[۳]{\sqrt{۳}\times\sqrt{۲۷}\times۵^۰}=\sqrt[۳]{۹}$

$\sqrt{a^۰}\cdot\sqrt{abc^۲}\cdot\sqrt{\frac{۱}{a^۰\cdot b^۰}}\cdot\sqrt{ab}=abc$ ، $(۹^۲)^۰+۶=\sqrt{۴۹}$

۱۱ـ نمایش هندسی اعداد جبری

بدیهی است که برای تعیین وضع نقطهٔ مانند A بر خط نامحدود $x'x$ (موسوم به محور) معلوم بودن فاصله نقطه A از نقطهٔ ثابتی مانند O که بر خط $x'x$ فرض شده و دانستن اینکه آیا نقطه A در سمت چپ یا راست آن قرار گرفته است لازم و کافی است .



اگر موافق قرارداد طولها را از O به x مثبت و از O به x' منفی اعتبار کنیم دیده میشود که اولاً هر نقطه از محور را میتوان با یک عدد جبری نمایش داد و ثانیاً هر عدد جبری نقطهٔ را بر محور $x'x$ معین میکند مثلاً عدد ۵+ نقطهٔ نمایش میدهد که بفاصلهٔ ۵ برابر واحد طول در سمت راست O قرار گرفته باشد (نقطه A) و عدد ۲ـ نقطه را نمایش میدهد که بفاصله ۲ برابر واحد طول در سمت چپ O قرار گرفته باشد (نقطه B) . بالعکس نقطه A نمایش عدد ۵+ و نقطه C نمایش ۳٫۵+ و نقطه B نمایش ۲ـ و بالاخره نقطهٔ D نمایش ۴ـ است . عدد جبری که قدر مطلقش فاصله نقطه متغیر وضع از نقطهٔ ثابت O که بمبدا، موسوم است باشد بطول آن نقطه

موهوم است مثلاً طول نقطه E ۲+ و طول نقطه F ۳- است

از آنچه گفتیم معلوم میشود که وضع نقاط واقع بر یک محور بواسطهٔ طولشان معین میشود

(نخستین مسئلهٔ تفریحی)

یک حیلهٔ حیرت انگیز

۱۵ نفر مسلمان و ۱۵ نفر یهودی در زورقی که دچار طوفان شدیدی شده نشسته اند ملاح گفت برای خلاص کردن نصف مسافرین باید نصف دیگر را در دریا بریخت و برای انجام این عمل قرار دادند که مسافرین بترتیب پهلوی یکدیگر بنشینند و آنها را از نه به نه شمرده نهمی را در آب اندازند و این عمل را آنقدر تکرار کنند تا ۱۵ نفر مسافر بیش نماند این ۳۰ نفر را چگونه بنشانیم تا آنهائی که در آب میافتند همه یهودی باشند.

حل — واضح است که در دفعهٔ اول آنهائی که در مرتبهٔ نهم و هجدهم و بیست و هفتم نشسته اند بدریا میافتند و چون بعد از اعدام این سه نفر با ۲۷ نفر باقی عمل را تکرار کنیم حائزین مراتب ۶ م و ۱۶ م و ۲۶ م از بین میروند و ۲۴ نفر دیگر باقی میمانند و چون عمل را آنقدر تکرار کنیم تا ۱۵ نفر بیش نمانند دیده میشود که حائزین مراتب ذیل جان باخته اند



۲۴ و ۲۳ و ۲۲ و ۱۹ و ۱۸ و ۱۶ و ۱۲ و ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و

۳۰ و ۲۷ و ۲۶

پس کافی است یهودیها را در اینمراتب و مسلمین را در ۱۵ مرتبه دیگر بنشانیم
برای اینکه عمل را بلا درنگ انجام دهید کافی است شعر ذیل را بخاطر بسپارید

دو رومی تو با یک عراقی بسنج		زترکان چهار وز هندوستان پنج
دو بازو سه زاغ و یکی چون سهیل		سه روز و شبی یک نهار و دو لیل
زنونه شمردن براقند یهود		دو باغ و دو میغ یکی هست و دود

در این اشعار اعدادیکه اول ذکر شده عدهٔ مسلمانان و اعدادی که در مرتبه دوم ذکر شده عدهٔ یهودیها است مثلاً از شعر اول (زترکان چهار وز هندوستان پنج). معلوم میشود که باید اول چهار مسلمان و بعد پنج یهودی نشانید و قس علیهذا الی آخره.

بدیهی است که در عمل میتوان بجای اشخاص اشیاء را قرار داد و اجرای این عمل را بسلیقهٔ قارئین میگذاریم.

فصل دوم

(اجرای اعمال اصلی در یکجمله)

۱۲- **تعریف** - حاصل ضرب چند مقدار جبری را یک جمله یا مُنُم خوانند مثلاً هر یک از عبارات ذیل یک جمله هستند: $-\frac{۲}{۳}a^{۲}bc$ و $۷a^{۳}xyz$ و $-۲\sqrt{۲}\,b$ و $-\frac{۴}{۵}c\sqrt{a}$ و $-\frac{۱}{x^{۲}}$ و $\sqrt[۵]{a^{۲}+b^{۲}}$ و $\frac{ab}{۲\sqrt{c}}$ و $-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^{۲}+xy}}$. مقادیر $-\frac{۲}{۳}$ و ۷ و $-۲\sqrt{۲}$ و $-\frac{۴}{۵}$ و -۱ و $+۱$ و $+\frac{۱}{۲}$ و -۱ را **ضریب** و $a^{۲}bc$ و $a^{۳}xyz$ و b و $c\sqrt{a}$ و $\frac{۱}{x^{۲}}$ و $\sqrt[۵]{a^{۲}+b^{۲}}$ و $\frac{ab}{\sqrt{c}}$ و $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^{۲}+xy}}$ را **جزء حرفی** یک جمله خوانند

وقتی در مخرج منم حرف نباشد منم را **صحیح** والا **کسری** خوانند مثلاً از بین منمهای فوق $-\frac{۲}{۳}a^{۲}bc$ و $۷a^{۳}xyz$ و $-\frac{۴}{۵}c\sqrt{a}$ و $-۲\sqrt{۲}\,b$ و $\sqrt[۵]{a^{۲}+b^{۲}}$ صحیح و بقیه کسری هستند.

وقتی یک جمله شامل ریشه حروف نباشد آنرا **مُنطق** والا **اصم** خوانند مثلاً از بین منمهای فوق الذکر سومی و چهارمی و پنجمی و ششمی و هشتمی اصم و بقیه منطقند.

وقتی جزء حرفی دو یا چند یک جمله مساوی باشند آنها را متشابه خوانند

مانند یک جمله های $\frac{۳}{۵}a^{۲}x$ و $-۲a^{۲}x$ ، $۳a^{۲}x$

مجموع چند نتم متشابه نتمی است که ضریبش مجموع ضرایب عددی و جزء حرفیش جزء حرفی مشترک آنها باشد

وقتی بجای چند نتم متشابه مجموعشان را قرار دهیم گویند عمل تحویل جمل متشابه بجا آورده‌ایم

مسئله - یک جمله های $۱۴xy$ و $-۹xy$ و $۵xy$ ، $-۳xy$ را جمع کنید

حل - موافق قاعده فوق الذکر مجموع مطلوب نتمی است که جزء حرفیش xy و ضریبش $۱۴-۹+۵-۳=۷$ باشد پس :

$$۱۴xy-۹xy+۵xy-۳xy=۷xy$$

مسئله - عبارت $A=۵x^{۲}-۶x^{۲}-۱۵x^{۲}+۱۱x^{۲}-x^{۲}-x^{۲}$ را مختصر کنید

حل - مطابق قاعده فوق ،

$$A=(۵-۶-۱۵+۱۱-۱-۱)x^{۲}=-۷x^{۲}$$

۲۰ مسئله - تحقیق کنید که ،

$$۲a+۵a-۸a=-a \text{ ، } x-۵x=-۴x \text{ ، } a+۷a+۱۴a=۲۲a$$

$$-۲c+۱۴c+۵c=۱۷c \text{ ، } ۲xy+۴xy=۶xy \text{ ، } x-۴x=-۳x$$

$$-۷c-۱۴c-۱۲c=-۳۳c \text{ ، } -۸b-۴b-۳b-۵b=-۲۰b$$

$٧xy-٢xy=٥xy$ ، $٢a\sqrt{b}+٧a\sqrt{b}-١٠a\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

$١٢\frac{b}{c}-\frac{٧b}{c}=٥\frac{b}{c}$ ، $ab+ab-ab+ab-٢ab=٠$

$٥٤x^٢y^٢z^٣+٣٥x^٢y^٢z^٣-٦٢x^٢y^٢z^٣=٢٧x^٢y^٢z^٣$

$١١a^٤b-٣٢a^٤b+٣٤a^٤b-١٠a^٤b-٣a^٤b=٠$

$١٢x^٨y^٤+٣٩x^٨y^٤-١٢x^٨y^٤-٣٤x^٨y^٤=٥x^٨y^٤$

$-٤٣a^٢c^٤+١٢a^٢c^٤-١٢٠a^٢c^٤+١٥١a^٢c^٤=٠$

$a^٥b^٧x+٣٩a^٥b^٧x+١١a^٥b^٧x-٥١a^٥b^٧x=٠$

$٩\sqrt{a^٢+b^٢}-٥\sqrt{a^٢-c}-١٠\sqrt{a^٢+b^٢}+٥\sqrt{a^٢-c}=-\sqrt{a^٢+b^٢}$

$٧\frac{\sqrt{a}}{x^٢}-٣\frac{\sqrt{a}}{x^٢}-٩\frac{\sqrt{a}}{x^٢}+\frac{٥\sqrt{a}}{x^٢}=٠$

$٩٢a^٣b^٩d-٧٤a^٣b^٩d+٣١a^٣b^٩d+١١a^٣b^٩d=٦٠a^٣b^٩d$

مسئله- از مجموع $٣xyz$ ، $٢xyz$ و $-١٠xyz$ مجموع $٨xyz$ و $-٣xyz$ و $-٧xyz$ را کم کنید (جواب $-٣xyz$)

مسئله مطلوبست حاصلضرب $٣xy^٢$ در $٧x^٣yz$

حل- واضحست که:

$٣xy^٢\times ٧x^٣yz=٣\times x\times y^٢\times ٧\times x^٣\times y\times z=٣\times ٧\times x\times x^٣\times$



$\times y^۲ \times y \times z = ۲۱x^۴y^۳z$

مسئله ۳ - مطلوبست حاصل ضرب $۲ax^۳y^۲$, $-۵x^۲y^۳$

حل - $(۲ax^۳y^۲)(-۵x^۲y^۳) = ۲ \times a \times x^۳ \times y^۲ \times (-۵) \times x^۲ \times y^۳ = -۱۰ax^۵y^۵$

۴ مسئله - تحقیق کنید که:

$۳b \cdot ۴b = ۱۲b^۲$, $(-۳a)(۲ab) = -۶a^۲b$, $(-۵b^۲)(۲b^۳) = -۱۰b^۵$

$۴c^۴ \cdot (-۵a^۶) = -۲۰a^۶c^۴$, $(-۱۲x^۷)(-۴x^۶) = ۴۸x^{۱۳}$, $a \cdot (-a) = -a^۲$

$۴a^۲ \cdot (-۶b^۴) = -۲۴a^۲b^۴$, $(-۲a^۷y^۹z)(۴yz^۲) = -۸a^۷y^{۱۰}z^۳$

$۵a^۲c^۷ \cdot (-۴a^۶) = -۲۰a^۸c^۷$, $(-۲x^۲y)(-xy^۲) + x^۳y^۳ = ۳x^۳y^۳$

مسئله - مطلوبست حاصل ضرب $-ay$ و $۵x^۳y^۲$, $-۲ay^۲$ -

حل - اگر حاصل ضرب مطلوب را به P بنمائیم:

$P = (-ay) \cdot (۵x^۳y^۲) \cdot (-۲ay^۲)$

$= (-a) \cdot y \cdot ۵ \cdot x^۳ \cdot y^۲ \cdot (-۲) \cdot a \cdot y^۲$

$= (-۲) \cdot ۵ \cdot (-a) \cdot a \cdot x^۳ \cdot y \cdot y^۲ \cdot y^۲ = ۱۰a^۲x^۳y^۵$

۵ مسئله - تحقیق کنید که:

$(-۲a^۲)(-۵xa)(a^۲yx) = ۱۰a^۵x^۲y$, $x^۳y \times y^۳x = x^۴y^۴$

$$(-3a^2b^2c^2)(-abc)(2ax)(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-3}) = -ac^2$$

$$(-9axy)(3az)(-2a^2x) = 54x^2yza^4$$

$$(-xy)(+x^2y^2)(-x^3y^3) + (xy^2)(x^3y)(x^2y^3) = 2x^6y^6$$

۱۳ قاعده ضرب یکجمله‌ها - از مسائل فوق قاعده ضرب چند یک جمله بدست میآید از اینقرار : حاصل ضرب چند منم منمی است که ضریبش حاصل ضرب ضرایب عوامل ضرب و جزء حرفیش حاصل ضرب اجزاء حرفی آنها باشد .

~~مسئله مسائل نمره ۱۲۴۰ و نمره ۱۲۶۰ را موافق اینقاعده حل کنید .~~

۱۴ مسئله - تحقیق کنید که :

$$(-3a^2bc)^2 = 9a^4b^2c^2,\ 2a^{-6} = \frac{2}{a^6},\ a^{-5} = \frac{1}{a^5},\ a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{17a}{b^6} = 17ab^{-6},\ \frac{-3a^2}{b^4} = -3a^2b^{-4},\ \sqrt{a^4} = \pm a^2$$

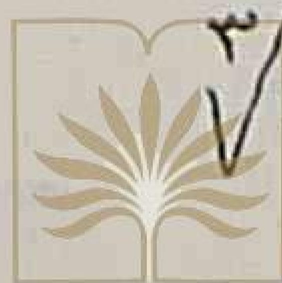
$$\sqrt[3]{27a^3b^3} = 3ab,\ \sqrt[3]{-8a^3c^3} = -2ac,\ (a^{12}c^3)^{\frac{1}{3}} = a^4c$$

$$(a^4b^2c^2)^{\frac{1}{2}} = \pm a^2bc,\ (xy)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{xy},\ \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\sqrt{20x^2y^2z^2 - 3x^2y^2z^2 - x^2y^2z^2} = \pm 4xyz$$

$$\sqrt[3]{a^3x^3 + 3a^3x^3 - 5a^3x^3} = -ax,\ 9x^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{\sqrt{x}}$$

$$(a^2b^2 + 9a^2b^2 + 7a^2b^2 - a^2b^2)^{\frac{1}{2}} = \pm 4ab$$



$$5\times 2^{a}+7\times 2^{a}+8\times 2^{a}-4\times 2^{a}-6\times 2^{a}=10\times 2^{a}$$

$$\frac{a^{2}b^{3}c^{3}}{x^{6}y^{6}z^{6}}=a^{2}b^{3}c^{3}x^{-6}y^{-6}z^{-6} \quad , \quad 3\times 2^{a}-9\times 2^{a}=-6\times 2^{a}$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$$

مسئله – مطلوبست خارج قسمت تقسیم $17a^{4}b^{3}$ بر $-3a^{6}b^{2}$

حل –

$$\frac{17a^{4}b^{3}}{-3a^{6}b^{2}}=-\frac{17}{3}\cdot\frac{a^{4}}{a^{6}}\cdot\frac{b^{3}}{b^{2}}=-\frac{17}{3}\cdot\frac{1}{a^{2}}\cdot b=\frac{-17b}{3a^{2}}$$

مسئله مطلوبست خارج قسمت تقسیم $9a^{5}b^{4}c^{3}d$ بر $4{,}5a^{4}b^{3}d^{7}$

حل – بدیهی است که:

$$\frac{9a^{5}b^{4}c^{3}d}{4{,}5a^{4}b^{3}d^{7}}=\frac{9}{4{,}5}\cdot\frac{a^{5}}{a^{4}}\cdot\frac{b^{4}}{b^{3}}\cdot c^{3}\cdot\frac{d}{d^{7}}$$

$$=2abc^{3}\cdot\frac{1}{d^{6}}=\frac{2abc^{3}}{d^{6}}$$

۱۵ مسئله – تحقیق کنید که:

$$\frac{15m^{2}n^{2}p^{2}}{3n^{2}mp^{3}}=\frac{5m}{p} \quad , \quad \frac{-5a^{2}b^{6}}{-6a^{3}b^{4}}=\frac{5b^{2}}{6a}$$

$$\frac{7xyzm^{2}}{pm^{2}xy^{2}z^{2}}=\frac{7}{pyz} \quad , \quad \frac{-18x^{4}y^{6}a^{2}}{2x^{3}y^{3}a^{2}}=-9xy^{3}$$

$$\frac{-2x^{m+2}y^{m+3}}{-x^{m-1}y^{m-2}}=2x^{3}y^{5} \quad , \quad \frac{a^{10m}}{a^{9m}}=a^{m}$$

$$\frac{2x^{2n}y^{3}z^{7}+4x^{2n}y^{3}z^{7}}{6x^{n}y^{2}z^{5}}=x^{n}yz^{2}$$



$$\frac{5x^m y^n z^p}{15x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = \frac{1}{3}x^{m+1}y^{n+1}z^{p+1}$$

$$\frac{a+b+c-a+d+e-b-e+x^m-c-d}{2xy+xy^2-xy+x^n-xy^2-xy} = x^{m-n}$$

$$\frac{2^m \times 2^n}{4^{m+n}} \times \frac{2^{2m}}{2^{m}} \times \frac{2^{3n}}{4^{2n}} = 1$$

$$(3x^2yz+2x^2yz-1.5x^2yz+5x^2yz-4.5x^2yz):$$

$$(6xy^2z+3y^2xz+0.5xy^2z-8.5xy^2z) = \frac{4x}{y}$$

$$\left(\frac{x}{y^5}.x^3y^9+\frac{2x^2}{y^2}.x^2y^8+\frac{x^3}{y^3}.xy^7-5x^4y^4\right):x^4y^4=1$$

$$\frac{-3a^{m+1}b^{n+2}}{-a^m b^2} - \frac{-a^{22}b^{18}}{-a^{14}b^{14}} = 3ab^2-a^8b^4$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2}:x^2\right)y^2 : \frac{a^q x^p}{a^p x^q} = a^{p-q}x^{q-p}$$

۱۴- قاعده تقسیم دو یکجمله: خارج قسمت دو منومی است که ضریبش خارج قسمت ضریب مقسوم بر ضریب مقسومٌ علیه و جزء حرفیش خارج قسمت جزء حرفی آنها باشد

مسئله- مسائل نمره ۱۳ و ۱۰ را موافق این قاعده حل کنید

مسئله- مطلوبست مقدار عبارت $x^2-a^3x-2a^6$ اولاً بازاء $x=2a^3$

ثانیاً بازاء $x=-a^3$ (جواب: صفر)

مسئله- مطلوبست مقدار عبارت $4a^2+8aR-5R^2+1$ بازاء $a=\frac{-5R}{2}$

(جواب: ۱)

مسئله – حساب کنید مقدار همان عبارت را بازاء $a=\frac{R}{2}$ (جواب ۱:)

مسئله – $a^{\frac{m}{n}}$ چه معنی دارد؟

حل – فرض کنیم $x=a^{\frac{m}{n}}$ چون طرفین را بقوه nام برسانیم حاصل میشود $x^{n}=a^{m}$ یا پس از استخراج ریشهٔ nام از طرفین $x=\sqrt[n]{a^{m}}$

یعنی $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$

مسئله – مقدار $9^{\frac{3}{2}}\times 16^{\frac{3}{4}}$ چقدر است

حل – $9^{\frac{3}{2}}\times 16^{\frac{3}{4}}=\sqrt{9^{3}}\times\sqrt[4]{16^{3}}=27\times 8=216$

۱۰ مسئله – تحقیق کنید که:

$$(-32)^{\frac{1}{5}}=-2 \,,\; 1^{\frac{7}{8}}=1 \,,\; 1^{\frac{m}{n}}=1 \,,\; 32^{\frac{2}{5}}=4$$

$$125^{\frac{2}{3}}=25 \,,\; \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{32} \,,\; 3^{\frac{3}{a}}=\sqrt[a]{27}$$

$$81^{\frac{m}{4}}=3^{m} \,,\; 2^{\frac{2}{m}}=\sqrt[m]{4} \,,\; (a^{4}b^{2})^{\frac{5}{2}}=a^{10}b^{5}$$

۱۱ مسئله – تحقیق کنید که:

$$a^{-2}b^{-3}c^{2}=\frac{c^{2}}{a^{2}b^{3}} \,,\; 3a^{2}xy^{-5}=\frac{3a^{2}x}{y^{5}} \,,\; 2^{-3}=\frac{1}{8}$$

$$x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[5]{x^{2}}}{\sqrt[3]{y}} \,,\; 5a^{-3}b^{\frac{5}{2}}c^{-\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{b^{5}}}{a^{3}\sqrt{c}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}=xy \,,\; x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$$

$$6a^3 \times 3a^{-4} = 18a^{-1} = \frac{18}{a} \quad , \quad a^5 : a^{-4} = a^{5-(-4)} = a^9$$

$$5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{12}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5 \quad , \quad 2a^{-\frac{7}{2}} \cdot 2a^{-\frac{5}{2}} \cdot 2a^{4} = 8a^{-2} = \frac{8}{a^2}$$

مسئله نابرآنکه : $A = 5x^2y - 3x^2y - 6x^2y + x^2y$,

$B = 5y^2x - 3y^2x - 6y^2x + xy^2 + 7xy^2 - 4xy^2 - 3xy^2$

$C = -5y^2x^2 + 3x^2y^2 + 3x^2y^2$ باشد $\frac{A}{B} \times C$ چقدر است

(جواب x^3y)

مسئله - عبارت $(8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{3}{2}}) \times 16^{-\frac{3}{4}} \times a^0$ را مختصر کنید

حل - اگر مقدار عبارت فوق را به x بنمائیم مرتباً چنین خواهیم داشت

$$x = (\sqrt[3]{8^2} + \sqrt{4^3}) \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = (4+8) \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

مسئله - عبارت $2^{-1} + 4^0 + 27^{\frac{2}{3}} - (\frac{1}{2})^{-2} - 4^{-\frac{1}{2}}$ را مختصر کنید

(جواب : ۶)

مسئله - عبارت $2^2 + 10^0 - 4^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[-2]{\frac{1}{16}}$ را ساده کنید

(جواب ۲-)

مسئله - عبارت $A = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$ را مختصر کنید

حل - واضحست که :

$$A = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} \, y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[12]{y^{7}}$$

مسئله ـ عبارت $A = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right) : \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$ را ساده کنید

حل ـ $A = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{7}{12}} : \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}} y^{\frac{5}{6}}$

مسئله ـ حاصل عبارت ذیل را بدست آورید

$$x = 27^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{8^{-\frac{2}{3}}} + \frac{2^{\frac{1}{5}}}{2^{-\frac{4}{5}}}$$

حل ـ: $x = \sqrt[3]{27^2} + \sqrt[4]{16^3} - 2 \times 8^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 11$

مسئله ـ عبارت ذیل را مختصر کنید

$$P = \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{ac} \cdot \frac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$$

حل ـ بسهولت معلوم میشود که:

$$P = b \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$$

$$= (b \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}})(a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}})(c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}}) = c^{\frac{13}{12}} = \sqrt[12]{c^{13}}$$

۹ مسئله ـ تحقیق کنید که:

$$5^2 - 1^0 + \frac{1}{2^{-4}} - 5^{-1} = 39{,}8 \quad , \quad 2\sqrt{a} + \frac{3}{a^{-\frac{1}{2}}} + a^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{a^7}}{a} = 5\sqrt{a}$$

$$\frac{1}{x^{-\frac{1}{x}}} = \sqrt[x]{x} \quad , \quad \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a^3} = \sqrt[6]{a^{13}} \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{y^{-4}}} = 2\sqrt{y^4} \quad , \quad 3^0 = 1$$



$$\frac{1}{4\sqrt[5]{x^{-3}}} = \frac{1}{4}\sqrt[5]{x^3} \quad , \quad \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{a^{-3}} \quad , \quad \frac{\sqrt[3]{x^{-a}}}{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^{a+2}}}$$

مسئله- ثابت کنید که: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$

برهان :- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$

مسئله- ثابت کنید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[mn]{x}$

دلیل :- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=x^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{x}$

مسئله- ثابت کنید که: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

اثبات :- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۱۲ مسئله- تحقیق کنید که: $\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$ ، $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}$ ، $(\sqrt{5})^4=25$

$\sqrt[9]{x}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$ ، $\sqrt[8]{x^2}=\sqrt[4]{\sqrt{x}}$ ، $\sqrt[6]{64}=2$ ، $\sqrt[9]{27}=1.4$

$\frac{6\sqrt{14}}{2\sqrt{21}}=3\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، $2\sqrt{15}\times3\sqrt{5}=6\sqrt{75}$ ، $5\sqrt{3}\cdot2.5\sqrt{2}=2\sqrt{1.5}$

$\frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{98}}:\frac{5}{7\sqrt{22}}=\frac{3\sqrt{11}\times7\sqrt{22}}{2\sqrt{98}\times5}=3.3$ ، $\frac{3\sqrt{48}}{5\sqrt{112}}\cdot\frac{6\sqrt{84}}{\sqrt{392}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

مسئله- ثابت کنید که: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{x}}}}=\sqrt[m\cdot n\cdot p\cdot q]{x}$

مسئله ثابت کنید که: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

برهان :- $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$

۴ مسئله تحقیق کنید که: $\frac{4}{11}\sqrt{\frac{77}{16}}=\sqrt{\frac{7}{11}}$ ، $5\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{750}$

$\frac{a}{x^2}\sqrt{\frac{3x^3}{a}}=\sqrt{\frac{3a}{x}}$ ، $\frac{3}{x}\sqrt{\frac{a^2}{x}}\times\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{2a^4}}=\sqrt{\frac{8}{a^2}}$

مسئله مطلوبست مقدار عبارت ذیل بازاء $x=a$

$$\frac{x^3+ax^2-a^2x+a^3}{x^2+ax+a^2}+\frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x^2-ax+a^2}$$

حل - اگر مقدار مطلوب را به y نمائیم :

$$y=\frac{a^3+a^3-a^3+a^3}{a^2+a^2+a^2}+\frac{a^3-a^3+a^3-a^3}{a^2-a^2+a^2}=\frac{2a^3}{3a^2}+\frac{0}{a^2}=\frac{2}{3}a$$

مسئله وقتی مخرج کسری که صورتش مقدار معینی است رو بتنزل گذارد مقدار کسر چگونه تغییر میکند ؟ برای مثال کسر $\frac{a}{x}$ را اختیار کنید و از اینرو معنائی برای $\frac{a}{0}$ بدست آورید .

حل - چون در کسر $\frac{a}{x}$ به x مقادیر $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ ، $\frac{1}{1000}$ ، .... ، $\frac{1}{100000000}$ و غیره را نسبت دهیم مقادیر نظیر $\frac{a}{x}$ عبارتند از $10a$ ، $100a$ ، $1000a$ ، .... $100000000a$ و غیره چنانکه دیده میشود هر چه مخرج کسر کوچک شود مقدار آن رو بتزاید میگذارد و بعبارة اخری هر قدر مخرج کسر بصفر نزدیک شود مقدار آن زیاد میشود بقسمی که وقتی مخرج کسر صفر شد مقدار آن فوق العاده بزرگ است و از اینجا معلوم میشود که $\frac{a}{0}$ مقدار بینهایت بزرگی را نمایش میدهد و اینمقدار بینهایت بزرگ را به ∞ (بینهایت) مینمایند یعنی $\frac{a}{0}=\infty$



مسئله ـ مطلوب است مقدار کسر $\frac{x^2-2x+5}{x^3-x^2+x}$ بازاء $x=0$ (جواب ∞)

مسئله ـ کسری مانند $\frac{a}{x}$ اختیار نموده در آن بجای x مرتباً مقادیر ۱ و ۱۰ و ۱۰۰ و...... را قرار دهید و از روی نتایج حاصله ثابت کنید که

$$\frac{a}{\infty}=0$$

مسئله ـ مطلوب است مقدار عبارت $\frac{x^2-5x+8}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$ بازاء $x=0$
(جواب صفر)

۱۵ ـ ذکر بعضی تعریفات و اصطلاحات لازمه

۱ ـ منم را نسبت بیکی از حروفش صحیح خوانند در صورتیکه آن حرف در مخرج منم نباشد.

مثلاً منم $\frac{a^2b}{c}$ نسبت به a و b صحیح و نسبت به c کسری است

۲ ـ درجه یک منم مجموع نمایندهای عوامل حرفی آنست مثلاً منم $a^2b^3x\,x\,y\,z$ از درجه هشتم و منم ab از درجه دوم است

۳ ـ درجه یک حرف را در منم درجه منم نسبت بآن حرف خوانند مثلاً منم a^2bc نسبت به a از درجه دوم و نسبت به b و c از درجه اول است

مسئله ـ صحت تساویهای ذیل را تحقیق کنید

$$\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} = 3 \quad ، \quad \sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} \quad , \quad \sqrt[3]{2x^2y} : \sqrt[3]{\frac{x}{4y^2}} = 2xy$$

$$\frac{a}{x}\sqrt[4]{\frac{6x}{5a^3}} = \sqrt[4]{\frac{6a}{5x^3}} \quad , \quad \frac{m}{n}\sqrt[a]{\frac{n^{a+1}}{m^{a+1}}} = \sqrt[a]{\frac{m}{m}}$$

$$\frac{48}{5\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{72}}{5} \quad , \quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{x^3y^3z^3}} = (xyz)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{2\alpha}{\beta}\sqrt[n]{\frac{\beta^{2n}}{2^{n}\cdot\alpha^{n+1}}} = \sqrt[n]{\frac{\beta n}{\alpha}}$$

$$\frac{3}{a-b} \times \sqrt{\frac{2x}{a-b}} : \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}} = \frac{a-b}{x}$$

$$xy \times \sqrt[-3]{\frac{1}{xy}} : \sqrt[-3]{xy^{-1}} = xy\sqrt[3]{y^2}$$

مسئله - مطلوب است مقدار عددی کسر $\dfrac{(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}\, b^{-2}\, c^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}\, b^{-\frac{5}{4}}\, c^{\frac{1}{4}}}$

بازاء $a=2 \;,\; b=3 \;,\; c=432$

(جواب ۱)



دومین مسئله تفننی

(مربعات سحری)

مربعی مانند ABCD به ۹ خانه تقسیم شده است میخواهیم ۹ عدد طبیعی را از یک تا ۹ در خانه های این مربع بترتیبی قرار دهیم که مجموع اعداد واقع در یک سطر یا در یک ستون یا در یک قطر مساوی باشد.

حل — باید اعداد را بطریق ذیل قرار داد:

A — B — C — D

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

چنانکه دیده میشود ۴+۹+۲ =

۳+۵+۷ = ۸+۱+۶ = ۴+۳+۸ = ۹+۵+۱

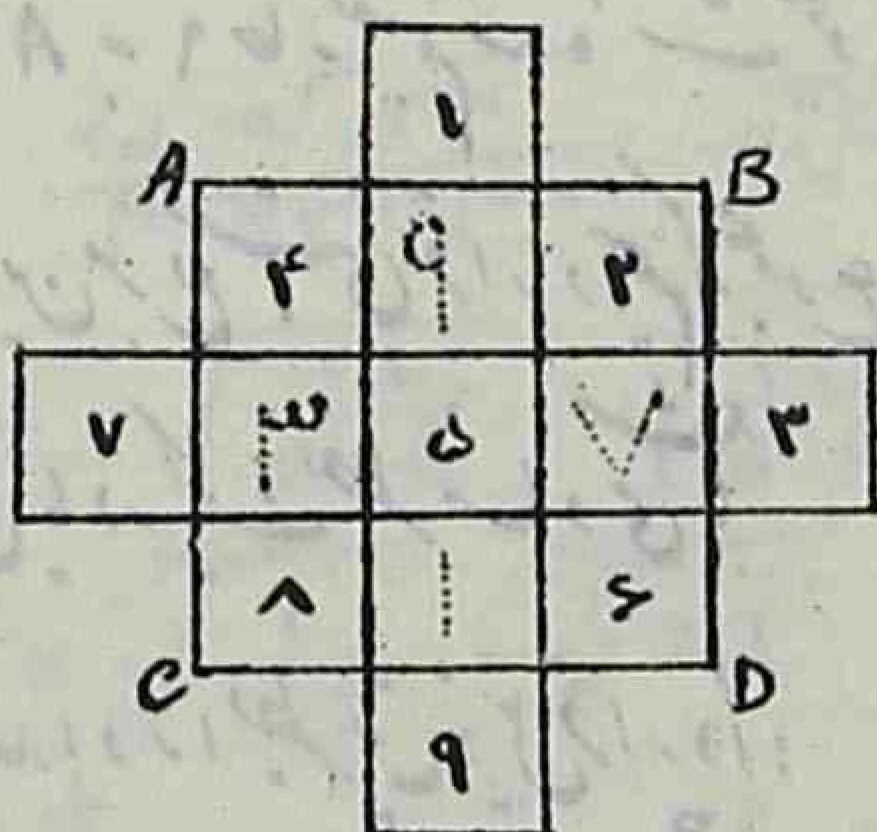
= ۲+۷+۶ = ۴+۵+۶ = ۲+۵+۸ = ۱۵

حل مسئله در حالت کلی بنا بر آنکه عدهٔ تقسیمات ضلع مربع عدد فردی باشد.

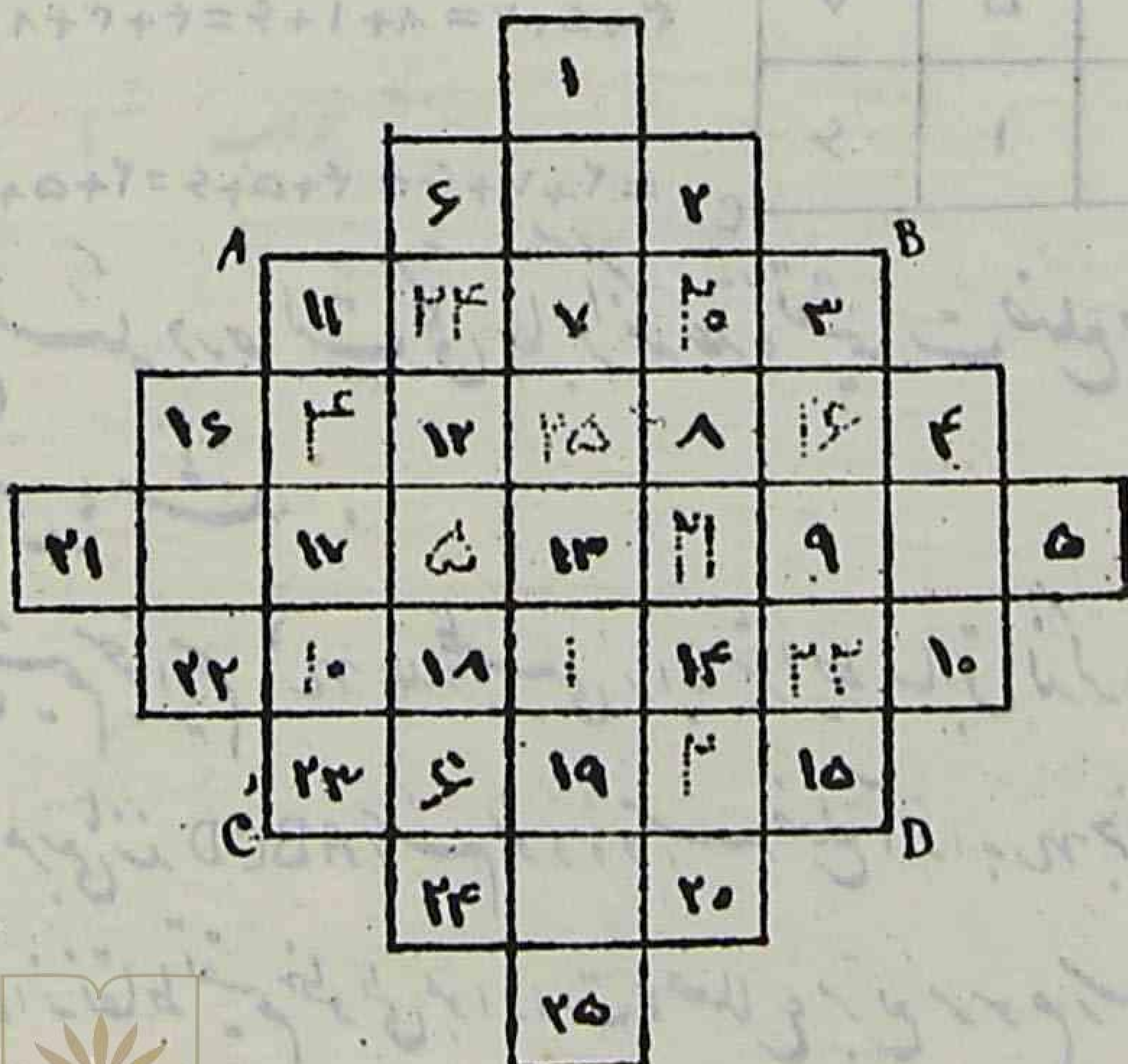
فرض کنیم میخواهیم n^2 عدد طبیعی را با شرایط سابق الذکر در مربعی قرار دهیم مربعی مانند ABCD رسم نموده و هر ضلع آنرا به n جزء مساوی تقسیم کرده از نقاط تقسیم خطوطی بموازات اضلاع مربع مرسوم رسم مینمائیم باین طریق مربع ABCD به n^2 خانه تقسیم میشود. بعد خطوط مرسوم را در خارج مربع

ABCD امتداد میدهیم و مربعاتی بر روی آنها رسم میکنیم تقسیمی که عدهٔ این مربعات رفته رفته کم شده بالاخره بیک مربع منتهی شود رجوع کنید بشکل (۱) (۲)

س ۱



س ۲





بعد در مربع کوچکی که در فوق شکل قرار دارد عدد ۱ را قرار داده
اعداد ۲ و ۳ را در مربعاتی که قطرشان برامتداد قطر مربع کوچک
فوقانی قرار دارد قرار میدهیم و بعد در سه مربع دیگری که قطرشان موازی با
قطر مشترک این مربعات است بترتیب اعداد ۴ و ۵ و ۶ را مینویسیم و بالاخره
در سه مربع دیگری که آنها نیز دارای این خاصیتند ارقام ۷ و ۸ و ۹
را میگذاریم عده از این ارقام که در داخل مربع ABCD واقع شده اند
بجای خود ثابت میمانند ولی آنهائیکه در فوق این مربع قرار دارند n خانه
پائین میآیند (در شکل ۱ ۳ = n است) و آنهائیکه در تحت مربع ABCD
قرار گرفته اند n خانه بالا میروند و بالاخره آنهائی که در سمت راست یا چپ مربع
ABCD قرار دارند n خانه بطرف چپ یا راست حرکت میکنند
(در شکل اعداد ویرا که بواسطه تغییر مکان در یکخانه آمده اند با نقطه نگاشته ایم)
و پس از اجرای این اعمال مربع ABCD پر میشود.
در شکل (۲) n را مساوی پنج اختیار کرده ایم آنوقت مربع ذیل
بدست میآید که مجموع هر سطر یا ستون یا قطر آن ۶۵
است

۳	۲۰	۷	۲۴	۱۱
۱۶	۸	۲۵	۱۲	۴
۹	۲۱	۱۳	۵	۱۷
۲۲	۱۴	۱	۱۸	۱۰
۱۵	۲	۱۹	۶	۲۳

مربع ذیل شامل ۸۱ عدد طبیعی است و مجموع هر سطر یا ستون یا قطر آن ۳۶۹ میباشد و پر کردن آن بر متعلم است :

۱۴	۵۷	۷۳	۶۷	۵۱	۳۵	۲	۲۵	۴۵
۶۳	۷۷	۶۶	۴۶	۳۱	۶	۲۶	۳۸	۱۶
۷۹	۷۲	۵۰	۳۰	۱	۲۲	۴۲	۱۷	۵۶
۶۵	۵۲	۳۶	۵	۲۱	۳۷	۱۳	۶۰	۸۰
۵۳	۲۹	۷	۲۷	۴۱	۱۲	۵۵	۷۶	۶۹
۳۳	۸	۲۰	۴۳	۱۸	۵۹	۷۵	۶۴	۴۹
۴	۲۴	۴۴	۱۱	۶۱	۸۱	۶۸	۴۸	۲۸
۱۹	۴۰	۱۵	۶۲	۷۴	۷۰	۵۴	۳۲	۳
۳۹	۱۰	۵۸	۷۸	۷۱	۴۷	۳۴	۹	۲۳

بمناسبت نیست قبل از ختم کردن این قسمت بعضی از خواص مربعات

سحری را متذکر شویم :

۱ـ اگر بهر یک (از هر یک) از ارقام واقع در یک مربع سحری یکمقدار اضافه (نقصان) کنیم مربع سحری جدیدی حاصل میشود . مثلاً اگر بهر یک از ارقام مربع سحری ۹ خانه یکواحد اضافه کنیم مربع سحری ذیل بدست میآید که مجموع سطر یا ستون یا قطر آن ۱۸ است

۳	۱۰	۵
۸	۶	۴
۷	۲	۹

۲ـ اگر ارقام مربع سحری را در یکعدد ضرب یا بر آن تقسیم کنیم مربع سحری جدیدی بدست میآید .

حل مسائل ذیل بر عهده متعلم است .

۱ـ مربع سحری تشکیل دهید که شامل ۴۹ عدد اول باشد

۲ـ مربع سحری نه خانه تشکیل دهید که مجموع همه سطر یا ستون یا قطرش ۴۵ باشد



۳ـ مربع سحری ۲۵ خانه تشکیل دهید که مجموع هر سطر یا ستون یا قطرش ۱۱۵ باشد

۲ـ فرض کنیم K عدد صحیحی باشد بزرگتر از S (S مجموع اعداد واقع در یک سطر یا یک ستون یا یک قطر مربع سحری n خانه است) ثابت کنید که اگر $\frac{K-S}{n}$ عدد صحیحی باشد پر کردن مربع سحری که مجموع ارقام واقع در یک سطر یا یک ستون یا یک قطرش K باشد ممکن است.



فصل سوم

اجرای اعمال اصلی بر کثیرالجمله ها

۱۶ـ **تعریفات** ـ کثیرالجمله رشته ایست از یک جمله ها که با علامت + یا ـ از یکدیگر جدا شده باشد مانند عبارات $\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{x^2} - \frac{a\sqrt{c}}{x^3}$

و $ax^2 + bx + c\,,\ 5a - 2b + 1 + xy$

ممکنست بعضی از یک جمله های مشکل یک کثیرالجمله متشابه باشند و در اینصورت باید عمل تحویل جمل متشابه را در آنها مجری داشت

مسئله کثیرالجمله $x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 3x + 6x^2 + 7a$ را مختصر کنید

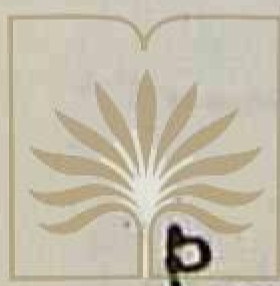
حل ـ واضح است که $-2x^2 - 5x^2 + 6x^2 = -x^2$ پس اگر در کثیرالجمله مفروض بجای $(-2x^2 - 5x^2 + 6x^2)$ ، $-x^2$ قرار دهیم حاصل میشود

$$x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 3x + 6x^2 + 7a = x^3 - x^2 + 3x + 7a$$

مسئله کثیرالجمله $y^3 - xy^2 + y^3 - 5xy^2 + 6y^3 - x^3 + 1$ را مختصر کنید

حل ـ اگر کثیرالجمله فوق را به P بنامیم :

$$P = y^3 + y^3 + 6y^3 - xy^2 - 5xy^2 - x^3 + 1$$



خلاصه $-xy^2-5xy^2=-6xy^2$, $y^3+y^3+6y^3=8y^3$ پس

$$P=8y^3-6xy^2-x^3+1$$

مسئله - کثیرالجمله $ax^2+by^2-3ax^2-3by^2+3xy$ را مختصر کنید

(جواب $3xy-2ax^2-2by^2$)

۱۷- جمع چند کثیرالجمله — برای جمع چند کثیرالجمله کافی است که آنها را بدنبال یکدیگر نوشته کثیرالجمله حاصل را مختصر کنیم

گاهی اوقات مناسب است که جمل متشابه کثیرالجمله ها را از زیر یکدیگر نوشته تا حساب آنها را ستون بستون جمع کنیم

مسئله - دو کثیرالجمله $7a+8b$, $2a-3b$ را جمع کنید

حل - موافق قاعدهٔ اول :

$$(2a-3b)+(7a+8b)=2a-3b+7a+8b$$

$$=9a+5b$$

مسئله اگر $A=5y^2+4x^2-3xy$, $B=7x^2-18y^2+14xy$ باشد $A+B$ را حساب کنید



حل - چون جمل متشابه دو کثیرالجمله را از زیر یکدیگر بنویسیم حاصل میشود

$$A = 5y^2 + 4x^2 - 3xy$$

$$B = -18y^2 + 7x^2 + 14xy$$

$$A + B = -13y^2 + 11x^2 + 11xy$$

مسئلهٔ ۱ اگر $A = x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$ و $B = 2x^4 - 8x^2 - x - 15$ و $C = x - x^5$ و $D = -1 - 9x^4 + 2x^2$ باشد $A + B + C + D$ چقدر است

حل - چون جمل متشابه کثیرالجمله های A ، B ، C و D را زیر هم بنویسیم حاصل میشود

$$A = x^4 - 5x^3 + x^2 + 1$$

$$B = 2x^4 \qquad - 8x^2 - 15 - x$$

$$C = \qquad\qquad x - x^5$$

$$D = -9x^4 \qquad + 2x^2 - 1$$

$$A + B + C + D = -6x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 15 + 0 - x^5$$

یا : $A + B + C + D = -6x^4 - 5x^3 - 5x^2 - 15 - x^5$

۱۸ تعریف - کثیرالجمله را نسبت بیکی از حروفش مرتب خوانند وقتی جمل آن را بقسمی مرتب شده باشند که نماینده آن حرف در کثیرالجمله دائماً ترقی یا تنزل کند

مثلاً کثیرالجمله $5x^4-3x^3+5x^2-9x$ برحسب قوای x و کثیرالجمله $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ برحسب قوای a و b بالاخره کثیرالجمله $1+y+y^2-y^4+y^6$ برحسب قوای y مرتب است اگر وقتی از چپ براست شروع بخواندن کثیرالجمله کنیم نماینده یکی از حروف در حال ترقی باشد گویند کثیرالجمله برحسب قوای صعودی آن حرف مرتب شده، در صورت عکس گویند کثیرالجمله برحسب قوای نزولی آن حرف مرتب میباشد مثلاً کثیرالجمله $5x^2+3x-7$ برحسب قوای نزولی x و کثیرالجمله $a^2+2ab+b^2$ برحسب قوای نزولی a و قوای صعودی b مرتب شده است. وقتی بخواهیم چند کثیرالجمله را جمع کنیم تقسیمی که مجموع برحسب قوای صعودی یا نزولی یکی از حروف مرتب باشد کافی است که قبل از اجرای عمل جمع کثیرالجمله های مفروض را برحسب قوای صعودی یا نزولی آن حرف مرتب کنیم چنانکه ذیلاً مشاهده میشود:

مسئله – کثیرالجمله های $A=a^5-a^3+2a^4$ و $B=3a^2+5a^3-6a^5$

$C=2a^5+7a^2-14a^3+10$ و $D=a+a^2-a^3+10$



را تقسیمی جمع کنید که مجموع برحسب قوای صعودی a مرتب باشد

حل - ابتدا کثیرالجمله های A و B و C و D را برحسب قوای صعودی a مرتب نموده جمل متشابه آنها را زیر هم مینویسیم و بعد عمل جمع را مجری میداریم باین شکل :

$$A = -a^3 + 2a^4 + a^5$$

$$B = +3a^2 + 5a^3 - 6a^5$$

$$C = 1 + 7a^2 - 14a^3 + 2a^5$$

$$D = 10 + a + a^2 - a^3$$

$$A + B + C + D = 11 + a + 11a^2 - 11a^3 + 2a^4 - 3a^5$$

مسئله - کثیرالجمله های $P = 1 - x^2 + x$ و $Q = -x + 1 + x^2$ و $R = x - 1 + x^2$ و $S = -x + x^2$ را باهم جمع کنید که مجموع برحسب قوای نزولی x مرتب باشد :

حل - ابتدا کثیرالجمله های مفروضه را برحسب قوای نزولی x مرتب نموده و آنها را باهم جمع میکنیم باین شکل :

$$P = -x^2 + x + 1$$

$$Q = x^2 - x + 1$$

$$R = x^2 + x - 1$$



$$S = x^4 \qquad -x$$

$$P+Q+R+S = x^4 + x^2 - 1$$

مسئله - بنابر آنکه $A = 2x^2 - x + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$ و $B = x^3 - x^4$ و $C = -x^2 - 2x^3 - 5x^5$ و $D = x - x^2 - 2x^3 - 3x^4$ باشد $A+B+C+D$ را بدست آورید در مسئله باید بدو طریق حل شود (جواب صفر)

مسئله - مجموع سه کثیر الجمله ذیل را بدو طریق حساب کنید

$$P_1 = x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - x^2z - xyz$$

$$P_2 = y^3 - xyz + yz^2 - y^2z + yx^2 - xy^2$$

$$P_3 = z^3 - xz^2 - xyz + zx^2 - yz^2 + xy^2$$

(جواب $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$)

مسئله - مجموع کثیر الجمله های $a^2+b^2+c^2-d^2$ و $a^2+b^2-c^2+d^2$ و $a^2-b^2+c^2+d^2$ و $d^2+c^2+b^2-a^2$ چه است ؛ بدو طریق)

(جواب $2a^2+2b^2+2c^2+2d^2$)

مسئله - فرض کنید $A = x^5+1$ و $B = x+x^2-x^4$ و $C = x^3+x^2-1$ و $D = x^2+x+1$ و $E = x^4+x^3+x^2+x$ و $F = -x^4-x^2-x-1$ و



$G = ۱ - ۲x^{۲} - x^{۵} - ۳x^{۲}$ و $A + B + C + D + E + F + G$ را

بدو طریق حساب کنید جواب $- ۱ + x^{۳} + ۲x^{۲} - ۲x - ۳x$

۱۹- **تفریق** - برای تفریق کردن دو کثیر الجمله علامت جمل مفروق را

تغیر داده حاصل را با مفروق منه جمع کنیم

مسئله مطلوبست تفاضل دو کثیر الجمله $P = ۵x^{۳} + ۴x^{۲} - ۷x + ۵$

و $Q = ۳ + ۶x^{۳} - ۵x^{۲} - x$

حل - بنا بر قاعده فوق باید علامت جمل Q را تغییر داده آنرا با P جمع کنیم

یعنی $P - Q = ۵x^{۳} + ۴x^{۲} - ۷x + ۵ + (-۳ - ۶x^{۳} + ۵x^{۲} + x)$

$= ۵x^{۳} + ۴x^{۲} - ۷x + ۵ - ۳ - ۶x^{۳} + ۵x^{۲} + x$

$= ۲ - ۶x + ۹x^{۲} - x^{۳}$

مسئله عبارت ذیل را مختصر کنید :

$A = a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳} - (a^{۳} + b^{۳} - ۳a^{۲}b)$

حل - مقصود از عبارت فوق تفاضل دو کثیر الجمله $a^{۳} + ۳a^{۲}b +$

$b^{۳} + ۳ab^{۲}$ و $a^{۳} + b^{۳} - ۳a^{۲}b$ است پس چون موافق قاعده تفریق

عمل کنیم چنین خواهیم داشت :



$A = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + (-a^3 - b^3 + 3a^2b)$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 - b^3 + 3a^2b$

$= 6a^2b + 3ab^2$

مسئله- عبارت $a-b-(a+b)$ را مختصر کنید

حل- باید علامت جمل $a+b$ را تغییر داده آنرا با $a-b$ جمع کرد و حاصل شود:

$a-b-(a+b) = a-b+(-a-b) = a-b-a-b = -2b$

مسئله- ثابت کنید که: $a-(a-b) = b$ ، $a-(b-a) = 2a-b$

مسئله- ثابت کنید که $a+(a-b+4a) = 6a-b$

مسئله- چه کثیرالجمله با a جمع کرد تا حاصل $2b$ شود

راه حل- کثیرالجمله مطلوب تفاضل $2b$ ، a است (جواب $2b-a$)

مسئله- ثابت کنید که: $a-b-(a-b)=0$ و $a+(b-a)=b$

مسئله- تحقیق کنید که: $a-(a+b-c-d) = c+d-b$

مسئله- مطلوب است مجموع پنج کثیرالجمله $3x^3+7+6x-10x^2+5x^3$

و $3x^3-x^2-9x$ و $4x-2x^3+2x^2$ و $2x^2-8-9x$ و



و ۴) $x-x^2-x^3+4$ ؛ جواب $3x-2x^2-7x+3$

مسئله تحقیق کنید که:

$4x-(2x+x^2)=2x-x^2$ ؛ $2a+(c-4a)=c-2a$

مسئله ۱۸) مجموع $x^5+x^4+x^2+x+1$ ، $3x+2x^6-5x^2+3x^6-2x^2$

و $x^5+4x^3+15x^2-1$ مجموع $6-2x+5+2x+x^5+2x^6$

$2x^6+x^5+x^4+2x^3+9x^2+2x^3$ ،۱ را کم کنید (جواب x^6+1).

۲۰) قواعد مهمه — واضح است که:

$$a+(m-c+d-e)=a+m-c+d-e$$

$$x+(b+c-5-f)=x+b+c-5-f$$

$$a-(m+3+k+l)=a-m-3-k-l$$

$$c-(x+y-a-b)=c-x-y+a+b$$

وغیره — در طرف اول تساوی اول دو مقدار $m-c+d-e$

و $b+c-5-f$ در داخل پرانتزی واقع که در

جلو آن علامت + قرار گرفته طرف دوم این تساویها عین طرف

اول است و فقط پرانتز آن حذف شده



در طرف اول دو نتای سوم و چهارم دو مقدار $m+l+b+e$

$b-a-y+x$ در داخل پرانتزی قرار دارند که بر آن علامت + مقدم است

در طرف دوم این پرانتز حذف شده اما یک تغییر در مقادیر داخل آن حاصل شده

و آن این است که علامت آنها تغییر کرده است مثلا $m+l+b+e$

$-e-b-l-m$ ، $x+y-a-b$ به $-x-y+a+b$:

تبدیل شده —— از این مطالب دو نتیجه ذیل بدست میاید :

نتیجه ۱- برای از بین بردن پرانتزی که بر آن علامت + مقدم باشد

محو کردن پرانتز کفایت میکند .

نتیجه ۲- برای از بین بردن پرانتزی که در جلو آن علامت − باشد

علاوه بر محو کردن پرانتز باید علامت جمل واقع در داخل آنرا تغییر د

مثل عبارت $P = x^2+5xy-y^2+(2x^2-4xy+2y^2)$ را مختصر کنید

حل - مقدم بر پرانتز عبارت فوق علامت + است پس از حذف

آن مرتبا چنین خواهیم داشت :

$$P = x^2+5xy-y^2+2x^2-4xy+2y^2$$

$$=3x^2+xy+y^2$$

مسئله- عبارت ذیل را مختصر کنید.

$$P = 2x^2 - xy + (2x^2 - y^2 + xy) + (4xy + 2y^2)$$

حل- پرانتزها را موافق نتیجه (۱) حذف میکنیم نتیجه میشود:

$$P = 2x^2 - xy + 2x^2 - y^2 + xy + 4xy + 2y^2$$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2$$

مسئله- عبارت $P = x^2 - (2x^2 + 7y^2 - xy)$ را مختصر کنید

حل- مقدم پرانتز عبارت فوق علامت - است پس موافق نتیجه (۲)

این پرانتز را حذف کرده بجای آن $-2x^2 - 7y^2 + xy$

قرار میدهیم حاصل میشود:

$$P = x^2 - 2x^2 - 7y^2 + xy = xy - 7y^2 - x^2$$

مسئله- عبارت $P = 2x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$ را مختصر کنید.

حل- بملاحظه نتیجه (۲) P را میتوان باینصورت نوشت:

$$P = 2x + 1 - x^3 - 3x^2 - 2x - 1$$

$$= -x^3 - 3x^2$$

مسئله- عبارت ذیل را مختصر کنید



$$Q = x^2 - 3x + (x^2 - 7x - 6) - (-2x^3 + 2x^2 + 9)$$

حل - مقدم بر پرانتز اول علامت + و مقدم بر پرانتز دوم علامت - قرار دارد و چون آنها را حذف کنیم نتیجه میشود :

$$P = x^2 - 3x + x^2 - 7x - 6 + 2x^3 - 2x - 9$$

یا : $P = 2x^2 - 10x - 15$

مسئله - عبارت $A = a + b - (a - b) - (2b - a)$ را ساده کنید

حل - واضح است $A = a + b - a + b - 2b + a = a$

مسئله - تحقیق کنید که : $a - (-a) + (-2a) = 0$

مسئله - تحقیق کنید که : $a - (b - c) = a + c - b \,,\; a - (a + b) = -b$

مسئله - ثابت کنید که :

$$a - (b - c) + a + (b - c) + b - (c + a) = a + b - c$$

مسئله - ثابت کنید که :

$$a - 2b - (4a - 6b - 3a + c - 5a + 4b + 3a - c) = 2a$$

مسئله - ثابت کنید که $-(-x^3 + 2x^2 - 5x - 1) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$



مسئله - عبارت $A = a - b - [2a - b - (3b - 3a)]$ را مختصر کنید

حل - مقصود از عبارت فوق آنست که تفاضل $2a-b$ ، $2b-3a$ را

از $a-b$ کم کنیم. خلاصه $(2a-b)-(2b-3a)=5a-3b$

پس $A=a-b-[5a-3b]=2b-4a$

مسئله - تحقیق کنید که : $a+[2a+c-(a+c-1)]=2a+1$

مسئله - تحقیق کنید که : $a+[(2a+x)-(3a-x)]=2x$

مسئله - ثابت کنید که : $4a-[a^2+2a+1-(a^2-2a+1)]=0$

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید ،

$$P=1-[1-(2-x)]+[4x-(3-6x)]+[4-(6x-5)]$$

حل - واضح است که $1-(2-x)=x-1$ ، $4x-(3-6x)=10x-3$ ، $4-(6x-5)=9-6x$ پس

$$A=1-(x-1)+(10x-3)+(9-6x)$$

$$=1-x+1+10x-3+9-6x=4+7x$$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$a-b-[b+c-d-(b+c-d)-(2b-a)]=b$$

مسئله- عبارت ذیل را مختصر کنید.

$$x = a - \{3a - 2c + 1 + 2b - 2c - [a - (a - b - c)]\}$$

حل- مقصود از این عبارت این است که $a-(a-b-c)$ را از $3a-2c+1+2b-2c$ نقصان نموده باقیمانده را از a کم کنیم

خلاصه $a-(a-b-c)=b+c$ و $3a-2c+1+2b-2c=$ $3a-4c+2b+1$ پس

$$x = a - \{3a - 4c + 2b + 1 - [b + c]\}$$

$$= a - \{3a - 4c + 2b + 1 - b - c\}$$

$$= a - \{3a - 5c + b + 1\} = 5c - 1 - b - 2a$$

مسئله ۱۱- تحقیق کنید که

$$(a+b+c)-(a+b-c)-(a-b+c) = b+c-a$$

$$[a-(b-c)]+[b-(c-a)]-[c-(a-b)] = 3a-c-b$$

$$x-\{y+[x-(y+x)]\} = x$$

$$12a-\{(a+b)-[b-(a-b)]-a\} = 11a+b$$

$$-\{-2x-[3y-(2x-3y)+(3x-2y)+2x]\} = x+2y$$



$$x-\{y+x+[x-(x+y+z)]\}=x$$

$$۱۲a-\{a+b-[b-(a-b)]-a\}=۱۱a+b$$

$$-\{-۲x-[۳y-(۲x-۳y)+(۳x-۲y)]+۲x\}=x+۴y$$

$$-\{a-[b-(c-a)]\}-\{b-[c-(a-b)]\}=a+b$$

$$۲a-b-(۳a-۲b)+(۲a-۳b)-(a-۲b)=۰$$

$$a^{۴}-[۴a^{۳}-(۶a^{۲}-۴a+۱)]-\{-۲-[a^{۴}-(-۴a^{۳}-۶a^{۲}+۴a)]-(۸a-۱)\}$$

$$=۲a^{۴}+۱۲a^{۲}+۲$$

قرار دادن پرانتز

واضح است که:

$$a+(b-c-d)=a+b-c-d$$

$$a-(b-c-d)=a-b+c+d$$

$$(b+c)-a+d=b+c-a+d$$

$$a+(b-c)-d=a+b-c-d$$

و یا:

$$a+b-c-d=a+(b-c-d) \quad (۱)$$

$$a-b+c+d=a-(b-c-d) \quad (۲)$$

$$b+c-a+d=(b+c)-a+d \quad (۳)$$

$$a+b-c-d=a+(b-c)-d \quad (۴)$$

در طرف اول هیچیک از چهار تساوی اخیر پرانتزی موجود نیست ولی :

اولاً در طرف دوم سه تساوی (۱) و (۳) و (۴) مقادیر $b - c - d$ و

$b + c$ و $b - c$ داخل پرانتزی شده اند که بر آن

علامت + مقدم است و تغییر دیگری در آنها عارض نشده ثانیاً در

طرف دوم تساوی (۲) مقدار $b + c + d$ داخل پرانتزی که

جلو آن علامت - است شده است اما علامت آن تغییر کرده است

نتیجه ۱ - هر جزء از عبارتی را میتوان داخل پرانتزی قرار داد

که جلو آن علامت + باشد

نتیجه ۲ - هر جزء از عبارتی را میتوان داخل پرانتزی قرار داد

که مقدم بر آن علامت - باشد بشرط آنکه علامت جمل آنجزء را تغییر دهیم

مثال - عبارت $ax - bx + cx - ay + by - cy$ را

میتوان باین صور نوشت

$$(ax - bx) + (cx - ay) + (by - cy)$$

$$(ax - bx + cx) - (ay - by + cy)$$

$$(ax - ay) - (bx - by) + (cx - cy)$$

مسئله- میخواهیم سه جملهٔ اخیر عبارت $2x^2-5x-9a+1$ را داخل پرانتزی که بر آن علامت + مقدم باشد قرار دهیم

حل- بنابر نتیجه (۱)

$$2x^2-5x-9a+1=2x^2+(-5x-9a+1)=2x^2+(1-9a-5x)$$

مسئله- دو جملهٔ اول عبارت ذیل را در پرانتزی که بر آن علامت − مقدم باشد و دو جملهٔ اخیرش را در پرانتزی که بر آن علامت + مقدم باشد قرار دهید :

$$P=ax^4-bx^3+cx^2-7+3x$$

حل : $P=-(bx^3-ax^4)+cx^2+(3x-7)$

یا : $P=(3x-7)+cx^2-(bx^3-ax^4)$

مسئله- دو جملهٔ اول هریک از عبارات ذیل را در پرانتزی که بر آن علامت + مقدم باشد و دو جملهٔ ماقبل آخر آنرا در پرانتزی که بر آن علامت − مقدم باشد قرار دهید

$$1+ax^2-cx^3+mx-2x^3-2a$$

$$ax^4-bx^3+cx^2-dx+ex^5-f$$

$$ax^n-bx^{n-1}-2a^3+25a^2-y-2y^2$$



جواب $(1+ax^2)-cx^3-(-mx+2x^3)-2a$

$(ax^4-bx^3)+cx^2-(dx-ex^5)-f$

$(ax^n-bx^{n-1})-2a^3-(-25a^2+y)-2y^2$

مسئله - عبارت : $P=ax^6-3bx^2+b^2x^3-cx^6-x^3-ax^2$

را بچند جزء تقسیمی تقسیم کنید که نماینده حرف x در جمیع جمل یکجزء مساوی باشد و بعد اولا هر یک از این اجزاء را در پرانتزی که بر آن علامت + مقدم باشد قرار دهید ثانیا هر یک از این اجزاء را در پرانتزی که بر آن علامت – مقدم باشد داخل کنید.

جواب : اولاً $P=(ax^6-cx^6)+(b^2x^3-x^3)+(-3bx^2-ax^2)$

ثانیاً $P=-(cx^6-ax^6)-(x^3-b^2x^3)-(3bx^2+ax^2)$

مسئله - همین عمل را در کثیر الجمله ذیل مجری کنید

$Q=x^7+1+x^6-ax^7-2bx^5+cx^6-c+x^5+x$

جواب $Q=(x^7-ax^7)+(cx^6+x^6)+(x^5-2bx^5)+(x)+(1-c)$

$Q=-(ax^7-x^7)-(-cx^6-x^6)-(2bx^5-x^5)-(-x)-(c-1)$

۲۲- ضرب یکجمله در کثیر الجمله

قاعده ضرب یکجمله در کثیر الجمله از اصل ذیل استنباط میشود :

اصل - برای ضرب یک عامل در مجموع چند عامل کافی است که آن عامل را در هر یک از عوامل جمع جبری ضرب نموده حاصلها را جمع جبری کنیم مثلاً

$$m(a+b-c-d)=ma+mb-mc-md$$

مسئله- میخواهیم ۳+۷-۹-۱۶-۱+۱۰-۴+۳ را در ۳ ضرب کنیم

حل- بنا بر اصل فوق :

۳(۳+۷-۹-۱۶-۱+۱۰-۴+۳) = ۳×۳ + ۳×۷ - ۳×۹ - ۳×۱۶ - ۳×۱ + ۳×۱۰ - ۳×۴ + ۳×۳ = ۹+۲۱-۲۷-۴۸-۳+۳۰-۱۲+۹ = -۲۱

مسئله- مطلوب است حاصل ضرب ۲a در ۳a-۵b+ac+۱

حل- اگر حاصل ضرب مطلوب را به P نمائیم

P = ۲a×۳a - ۲a×۵b + ۲a×ac + ۲a×۱

= ۶a۲ - ۱۰ab + ۲a۲c + ۲a

مسئله- عبارت x(x-۱) - ۳(x-۱) را مختصر کنید

حل- واضح است که x(x-۱) = x۲ - x و ۳(x-۱) = ۳x - ۳



پس : $x(x-1)-3(x-1)=(x^2-x)-(3x-3)$

$=x^2-x-3x+3=x^2-4x+3$

۶ مسئله تحقیق کنید که :

$3(2-7)=-15\ ,\ 2(-1-2-3+8)=4\ ,\ 7(5+3+2)=70$

$2(3{,}5-2{,}4+3{,}4)=9\ ;\ 3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)=-1\ ,\ 2(7+1)=16$

۷ مسئله تحقیق کنید که :

$3x(5x^4+2x^2+7x-1)=15x^5+6x^3+21x^2-3x$

$a\left(x^2+\frac{x}{a}+\frac{c}{a^2}\right)=ax^2+x+\frac{c}{a}$

$2(x^3+1{,}5x^2+8x+3{,}5)=2x^3+3x^2+16x+7$

مسئله عبارت $a(a+3c-b)+2b(a-b+2c)$ را مختصر کنید

جواب $a^2+ab+3ac-2b^2+4bc$

مسئله عبارت $x^2(2x+1)-(2x^3-1)$ را مختصر نمائید. جواب x^2+1

مسئله تحقیق کنید که : $3x^2\left(x^2+\frac{1}{3}x+1\right)=3x^4+x^3+3x^2$

مسئله تحقیق کنید که $am(m+bm+6)=am^2+abm^2+6am$

مسئله ثابت کنید که : $3m^2(1+3m)=3m^2+9m^3$



مسئله - ثابت کنید که: $x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^{n} = -x^{n}(1 - x^{n} + x^{2n} - x^{3n})$

مسئله - ثابت کنید که:

$$P = 2a^2(2a^3 + 3a^2 + 4a - 2) - 4a(2a^3 + 3a^2 + 4a - 2) - 3(2a^3 + 3a^2 + 4a - 2)$$

$$= 4a^5 - 2a^4 - 10a^3 - 29a^2 - 4a + 6$$

طریق اثبات - باید ملاحظه کرد که:

$$P = 4a^5 + 6a^4 + 8a^3 - 4a^2 - (8a^4 + 12a^3 + 16a^2 - 8a)$$

$$- (6a^3 + 9a^2 + 12a - 6)$$

مسئله - ثابت کنید که اگر $x = -(a+b+c)$ ، $y = ab + bc + ca$ ، $z = -abc$ باشد. $a^3 + a^2x + ay + z = 0$

مسئله - با همان مفروضات ثابت کنید که $b^3 + b^2x + by + z = 0$

مسئله - مطلوبست مقدار عبارت $bx + cy + az$ بازاء

$x = b + c - a$ ، $y = c + a - b$ ، $z = a + b - c$

(جواب $a^2 + b^2 + c^2$)

مسئله - مطلوبست مقدار $ax - a^2 + bx - b^2$ بازاء $x = a - 2b$

(جواب $-3b^2 - ab$)



مسئله - ثابت کنید که :

$$(x+y)^2\left[(x+y)^3+(x+y)^2+(x+y)+1\right]=(x+y)^5+(x+y)^4+(x+y)^3+(x+y)^2$$

۲ مسئله - تحقیق کنید که :

$$x^n(x^n-y^n)+y^n(x^n-y^n)=x^{2n}-y^{2n}$$

$$b^m(1+b-b^n+b^m)=b^{2m}-b^{m+n}+b^{m+1}+b^m$$

۳۳ - تقسیم کثیرالجمله بر یک جمله

قاعده تقسیم کثیرالجمله بر یک جمله از اصل ذیل استنباط می شود .

اصل - برای تقسیم مجموع جبری چند عامل بر یک عامل کافی است یک یک از عوامل جمع جبری را بر عامل مفروض تقسیم نموده خارج قسمتهای جزئیه را جمع جبری کنیم مثلاً : $\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$

مسئله - مطلوبست خارج قسمت ۱۰۰ + ۶۴ - ۳۲ - ۱۶ بر ۴

حل - از اصل فوق معلوم میشود که :

$$(16-32-64+100):4=\frac{16}{4}-\frac{32}{4}-\frac{64}{4}+\frac{100}{4}$$

$$=4-8-16+25=5$$

مسئله - میخواهیم $x^2+xy^3+y^3$ را بر x^2y تقسیم کنیم

حل $\frac{x^2+xy^3+y^3}{x^2y}=\frac{x^2}{x^2y}+\frac{xy^3}{x^2y}+\frac{y^3}{x^2y}$

$$=\frac{1}{y}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{x^2}$$

مسئله - مطلوب است خارج قسمت تقسیم $x^2y^3-x^3y^2-xy$ بر xy

حل - بدیهی است که:

$$(x^2y^3-x^3y^1-xy):xy=\frac{x^2y^3}{xy}-\frac{x^3y^1}{xy}-\frac{xy}{xy}$$

$$=xy^2-x^2y-1$$

مسئله - تحقیق کنید که:

$$\frac{8+16+40}{4}=4^2\,,\quad\frac{5^2-120+7^2+5^2-2^2}{10}=53$$

$$\frac{x^3+y^3-3axy}{x^2}=x+\frac{y^3}{x^2}-\frac{3ay}{x}$$

$$\frac{5x^3+15x^2y^2+20xy}{15x-2x-8x}=x^2+3xy^2+4y$$

مسئله - تحقیق کنید که:

$$\frac{x^{2m}+x^{m-2}}{x^{m-2}}=x^2+1\,,\quad\frac{2x^m+3x^{2m}}{x^m}=2+3x^m$$

مسئله - ثابت کنید که: $\frac{c^{2+3}+c^{2+4}-2c^{2+5}-3c^{2+6}}{c^{2+2}}=c+c^2-2c^3-3c^4$

مسئله - تحقیق کنید که: $\frac{y^m-2y}{y^3}=-y^{m-3}+\frac{2}{y^2}$

$$\frac{x^3y^2-5xy^3+xy}{-xy}=5y^2-x^2y-1$$

۵ـ تحقیق کنید که :

$$\frac{(a+b)^5+(a+b)^3}{(a+b)^2}=(a+b)^3+a+b$$

۶ـ تحقیق کنید که :

$$\frac{x^3y^2+y^3x^2+x^4y+y^4x}{x^5}=\left(\frac{y}{x}\right)^4+\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)$$

(باید ملاحظه کرد که $\left(\frac{y}{x}\right)^4=\frac{y^4}{x^4}$ وغیره)

۲۲ـ تعریف ـ وقتی یک عبارت جبری حاصل ضرب دو یا چند عبارت دیگر باشد هریک از این عبارات را عامل عبارت اول خوانند مثلاً عوامل $3a^3-3ax$ عبارتند از $3a$ ، a^2-x زیرا $3a(a^2-x)=3a^3-3ax$ و عوامل $a^2x^3+ax^2+a^2x$ عبارتند از ax ، ax^2+x+a زیرا $ax(ax^2+x+a)=a^2x^3+ax^2+a^2x$ اگر ملاحظه کنیم که $3a^3-3ax=3a\cdot a^2-3a\cdot x$ و نیز $a^2x^3+ax^2+a^2x=ax\cdot ax^2+ax\cdot x+ax\cdot a$ دیده میشود که در جمیع جمل عبارت اول عامل $3a$ و در کلیه جمل عبارت ثانی عامل ax موجود است چنین عواملی را عوامل مشترک خوانند

۷ـ ثابت کنید که عوامل x^2+2ax عبارتند از x ، $x+2a$

مسئله - ثابت کنید که عوامل $a^2x^2 + abx + a^2y^2x$ عبارتند از ax , $ax + b + ay^2$

مسئله - عامل مشترک جمل عبارت $a^2 - 2a^3 + a^4x$ چیست (جواب: a^2)

مسئله - عامل مشترک جمل عبارت $x^2 + x^4 - ax^6$ را تعیین کنید (جواب: x^2)

۴۵ - عامل مشترک گرفتن

مجموع جبری چند عامل که دارای عامل مشترکی باشند مساوی است بحاصل ضرب آن عامل در خارج قسمت مجموع اصلی بر عامل مشترک مفروض

مثال ۱ - در جمیع جمل عبارت $8a^3 + a^2 - ab$ عامل a مشترک است پس:

$$8a^3 + a^2 - ab = a\left(\frac{8a^3 + a^2 - ab}{a}\right) = a(8a^2 + a - b)$$

مثال ۲ - در جمیع جمل عبارت $2a - 8ab + 4ac$ عامل $2a$ مشترک است پس:

$$2a - 8ab + 4ac = 2a\left(\frac{2a - 8ab + 4ac}{2a}\right)$$

$$= 2a(1 - 4b + 2c)$$

مثال ۳ - در جمیع جمل عبارت $5(x+1) - x(x+1)^2$ عامل $x+1$ مشترک است پس:

$$5(x+1) - x(x+1)^2 = (x+1)\left[\frac{5(x+1) - x(x+1)^2}{x+1}\right]$$

$$= (x+1)\left[5 - (x+1)x\right] = (x+1)(5 - x^2 - x)$$



این عمل را عامل مشترک گرفتن خوانند

۱۵ مسئله ـ تحقیق کنید که :

$۲-۴=۲(۱-۲)$ و $۹-۱۵=۳(۳-۵)$ و $۸-۶=۲(۴-۳)$

$۲-۷=۲(۱-۲٫۵)$ و $۱٫۵-۲٫۲۵=۱٫۵(۱-۱٫۵)$ و $۱۴-۲۱=۷(۲-۳)$

$۲-۰=۲(۱-۰)$ و $a^{۲}+a=a(a+۱)$ ، $a^{۳}+a^{۲}=a^{۲}(a+۱)$

$$a^{۴}+a^{۵}-a^{۳}-a^{۲}=a^{۲}(a^{۳}+a^{۲}-a-۱)$$

$$x^{۲}y^{۲}+x^{۲}y+xy=xy(xy+x^{۲}+۱)$$

$$abx-acx-abcx=ax(b-c-bc)$$

$$ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$a^{۲}b-a^{۲}b^{۲}+a^{۳}b=a^{۲}b(۱-b+a)$$

$$۵b^{۲}c+۱۰b^{۴}c^{۲}-۱۵abc=۵bc(b+۲b^{۳}c-۳a)$$

مسئله ـ ثابت کنید که :

$$۱۵a^{۲}x^{۲}-۳۰a^{۲}x^{۳}+۱۰۵a^{۲}x^{۴}-۷۵a^{۲}x^{۵}=$$

$$۱۵a^{۲}x^{۲}(۱-۲x+۷x^{۲}-۵x^{۳})$$

مسئله ـ ثابت کنید که :



$$x^{m+n}y^{m}-x^{2n}y^{m+n}-x^{n}y^{2m}$$

$$=x^{n}y^{m}(x^{m}-x^{n}y^{n}-y^{m})$$

مسئله ـ ثابت کنید که :

$$13x^{4}y-13x^{2}y^{3}=13x^{2}y(x^{2}-y^{2})$$

مسئله ـ ثابت کنید که : $x(x-a)+y(x-a)=(x+y)(x-a)$

مسئله ـ ثابت کنید که :

$$a^{4}(x+1)^{4}+b^{4}(x+1)^{3}=(x+1)^{3}(b^{4}+a^{4}+a^{4}x)$$

مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$21a^{4}b^{3}c^{2}-14a^{2}b^{4}c^{3}+7a^{2}b^{3}c^{4}=7a^{2}b^{3}c^{2}(3a^{2}-2b^{2}+c^{2})$$

مسئله ـ ثابت کنید که : $x^{2}+y^{2}-z^{2}=-(z^{2}-x^{2}-y^{2})$

اثبات ـ کافی است که در طرف اول ۱ـ را عامل مشترک قرار دهیم حاصل میشود

$$x^{2}+y^{2}-z^{2}=-1\left(\frac{x^{2}+y^{2}-z^{2}}{-1}\right)=-(-x^{2}-y^{2}+z^{2})$$

$$=-(z^{2}-x^{2}-y^{2})$$

مسئله ـ ثابت کنید که :



$$x^2-2ax-a^2-z^2-zx=-(z^2+zx+a^2+2ax-x^2)$$

۲ مسئله — کثیر الجمله های ذیل را بر حسب قوای نزولی x مرتب کنید.

$$P=x^7-2x+ax^5-a^2b+cx^2-dx+x^6$$

$$Q=x^4-x^3-(xy)^3+x^2y^2-a^2x^5+x^4-x^5-1$$

جواب

$$P=x^7+x^6+ax^5+cx^2-x(d+2)-a^2b$$

$$Q=-x^5(a^2+1)+2x^4-x^3y^3+x^2y^2-1$$

مسئله ـ ثابت کنید که

$$x^m-y^m+x^ny^n-x^n-y^n=$$

$$x^n(y^n-1)-(y^n+y^m-x^m)$$

۲ مسئله ـ ثابت کنید که :

$$a-b=-\{-[-(b-a)]\}$$

$$2^m\cdot 2^{2m}-4^m=2^{2m}(2^m-1)$$

۲۶ ـ ضرب دو کثیر الجمله

برای ضرب کردن دو کثیر الجمله کافیست هر یک از جمل مضروب را با ملاحظهٔ علامت آن در هر یک از جمل مضروبٌ فیه ضرب نموده حاصل ضرب های

جزئیه را جمع کنیم . برای سهولت عمل جمع باید جمل متشابه حاصل ضربهای جزئیه را زیر یکدیگر نوشت .

مسئله حاصل ضرب دو کثیر الجمله $x-y$ و $2x+5y$ را تعیین کنید

حل - صورت عمل چنین

$$\begin{array}{r} x-y \\ 2x+5y \\ \hline A=2x^2-2xy \qquad \\ B= \qquad +5xy-5y^2 \\ \hline 2x^2+3xy-5y^2 \end{array}$$

توضیح - $2x^2$ حاصل ضرب جمله اول مضروب ($2x$) در جمله اول مضروب فیه (x) است . $2xy$ - حاصل ضرب جمله اول مضروب ($2x$) در جمله دوم مضروب فیه ($-y$) میباشد . $5xy$ حاصل ضرب جمله دوم مضروب ($5y$) در جمله اول مضروب فیه (x) است . $-5y^2$ حاصل ضرب جمله دوم مضروب ($5y$) در جمله دوم مضروب فیه ($-y$) میباشد (دو جمله متشابه $-2xy$ و $+5xy$ را از زیرهم نوشته ایم) از جمع دو کثیر الجمله A و B حاصل ضرب مطلوب بدست میآید

ممکن است عمل را باینصورت اجرا کرد :

$$(x-y)(2x+5y)=2x^2-2xy+5xy-5y^2=2x^2+3xy-5y^2$$

باید دانست که وقتی که مضروب و مضروب فیه دو کثیر الجمله مختصر باشند اجرای عمل بصورت سهلتر است و در مواقع دیگر طریق اول مرجح میباشد

مسئله مطلوبست حاصل ضرب $a+b$ ، $a-b$

حل - $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

مسئله حساب کنید حاصل ضرب $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ را .

حل - صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 \\ x - y \\ \hline x^3 + x^2y + xy^2 \qquad \\ -yx^2 - xy^2 - y^3 \\ \hline x^3 \qquad\qquad\quad - y^3 \end{array}$$

مسئله حساب کنید $(a+b)^2$

حل - : واضحست که $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ پس

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مسئله مطلوبست $(a+b)^3$

حل - واضحست که :

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$



$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$\begin{array}{c} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

مسئله - اگر $A=x^2+y^2+z^2+xy-xz-yz$ و $B=a+b+c$

باشد $A\times B$ را حساب کنید

حل - صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \\ \qquad x+y+z \\ \hline x^3+xy^2+xz^2-x^2y-x^2z-xyz \\ +y^3-xy^2 \quad +yz^2 \quad -xyz+yz^2-y^2z \\ +z^3 \quad -xz^2 \quad +zx^2-xyz-yz^2+y^2z \\ \hline x^3+y^3+z^3 \qquad -3xyz \end{array}$$

مسئله - ثابت کنید که

$$(x-1)(x+1)=x^2-1 \;,\; (x-1)(x-2)=x^2-3x+2$$

مسئله - ثابت کنید که $(x+5y)(x-5y)=x^2-25y^2$

مسئله - ثابت کنید که: $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$

مسئله ـ تحقیق کنید که : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مسئله ـ ثابت کنید که : $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = x^4 - a^4$

مسئله ـ ثابت کنید که : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

مسئله ـ مطلوبست محاسبهٔ $(a+b)^4$

طریق حل ـ با ملاحظه کردن $(a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$

جواب $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$(a+b+c)(a+b-c) = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$

$$(x+y+z)(x-y-z) = x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

مسئله ـ ثابت کنید که :

$$(2a+3b-c)(2a-3b+c) = 4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2$$

$$(x-2y-3)(x^2+4y^2+9-6y+3x+2xy) =$$

$$x^3 - 8y^3 - 27 - 18xy$$

$$(2-a-3a^2+a^3)(1+2a-a^2) = 2+3a-7a^2-4a^3+5a^4-a^5$$

مسئله ـ اگر $A = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + b(a-1) + b(1-a)$

و $B = x^2 + 2xy + y^2$ باشد $A \times B$ را حساب کنید.

جواب $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

مسئله ـ ثابت کنید که:

$$(a^2 - 2a + 1)(a^{m+1} + 2a^m + a^{m-1})$$
$$= a^{m+3} - 2a^{m+1} + a^{m-1}$$

مسئله ـ ثابت کنید که:

$$(1 + 2x - 3x^2)^2 = 1 + 4x - 2x^2 - 12x^3 + 9x^4$$

مسئله ـ ثابت کنید که:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

مسئله ـ بدون اجرای عمل ضرب $(x + y - z)^2$ را حساب کنید

حل ـ کافی است که در تساوی مسئله فوق بجای z ، $-z$ قرار دهیم حاصل میشود

$$[x + y + (-z)]^2 = x^2 + y^2 + (-z)^2 + 2xy + 2x(-z) + 2y(-z)$$

یا $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$



مسئله ـ بدون اجرای عمل ضرب $(x - y - z)^2$ را بدست آورده صحت نتیجه حاصل را

عمل ضرب تحقیق کنید

مسئله - ثابت کنید که $(x^2+3x+1)^2 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1$

مسئله - صحت تساوی ذیل را بعمل ضرب ثابت کنید:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z$$
$$+3z^2x+3z^2y+6xyz$$

مسئله بدون عمل ضرب $(x-y-z)^3$ را حساب نموده صحت نتیجه حاصل را بعمل ضرب تحقیق کنید

مسئله - اگر

$$A = a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd$$

$B=a+b+c+d$. باشد $A \times B$ چقدر است

$$a^3+b^3+c^3+d^3-3(bcd+cda+dab+abc)$$

مسئله - مطلوبست حاصلضرب دو کثیر الجمله ذیل

$$x^2+y^2+z^2+u^2+2ux-xy-yu-uz-zx-yz$$

و $x+y+z+u$

جواب $x^3+y^3+z^3+u^3-3xyz-3yzu$

مسئله - مطلوبست محاسبه حاصل ضرب دو کثیر الجمله ذیل

$x+y \;,\; x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$

جواب x^7+y^7

مسئله عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$x=(a-b)(c-d)+(a-c)(d-b)+(a-d)(b-c)$$

حل ـ بعمل ضرب معلوم میشود که :

$$(a-b)(c-d)=ac-cb-ad+bd$$

$$(a-c)(d-b)=\quad +bc+ad \quad -dc-ba$$

$$(a-d)(b-c)=-ac \quad -bd+cd+ab$$

چون این سه تساوی را عضو بعضو جمع کنیم نتیجه می شود $P=0$

مسئله ـ عبارت ذیل را مختصر کنید

$$P=(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$$

حل ـ واضحست که :

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$
$$(b+c-a)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac$$
$$(c+a-b)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$$
$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$$



از جمع این چهار تساوی نتیجه میشود $P=4(a^2+b^2+c^2)$

مسئله - ثابت کنید که :

$$(a-b)(a+b-c)+(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)=0$$

مسئله - ثابت کنید که :

$$\pi h\left(\frac{R+r}{2}\right)^2+\pi h\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

مسئله - ثابت کنید که :

$$(1+x+x^2+x^3)^2=1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$$

مسئله - ثابت کنید که :

$$\frac{1}{9}\left[(2b+2c-a)^2+(2c+2a-b)^2+(2a+2b-c)^2\right]$$
$$=a^2+b^2+c^2$$

مسئله - ثابت کنید که :

$$(m^4-n^4)+2n(m^3+n^3)-(m+n)^2(m-n)^2$$
$$=2m^2n(m+n)$$

۲۷ - ضرب چند کثیر الجمله - برای ضرب کردن چند کثیر الجمله در یکدیگر کافی است که حاصل ضرب دو کثیر الجمله اول را در کثیر الجمله سوم ضرب نموده و

و این حاصل را در کثیر الجمله چهارم ضرب کنیم و قس علیهذا الی آخره

مسئله - تحقیق کنید که :

$$(c+d)(c-d)(a-b)=ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$$

تحقیق - واضحست که $(c+d)(c-d)=c^2-d^2$ پس

$$(c+d)(c-d)(a-b)=(c^2-d^2)(a-b)=$$

$$ac^2-ad^2-bc^2+bd^2$$

مسئله - حاصل ضرب ذیل را بدست آورید

$$(x^2+1)(x^2+x+2)(x^2+2x+2)$$

(جواب : $x^6+3x^5+7x^4+9x^3+10x^2+6x+6$)

مسئله - ثابت کنید که :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$$

اثبات - بعمل ضرب و جمع معلوم میشود که :

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$$



$$(x^2+3x+1)^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$$

و تساوی این دو مقدار بدیهی است

مسئله ـ ثابت کنید که :

$$(a+b+c)^3-3(a+b)(a+c)(b+c)=a^3+b^3+c^3$$

مسئله ـ ثابت کنید که :

$$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

۲۸ ـ تعریف ـ هرگاه پس از اجرای اعمال و اختصارات لازمه طرفین تساوی عین یکدیگر باشند آن تساوی را اتحاد خوانند مثلاً تساوی $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ اتحاد است و دو مقدار a^2+b^2+2ab و $(a+b)^2$ متحدند و متحد بودن آنها باینصورت مینمایند :

$$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$$

از تعریف فوق معلوم میشود که مقدار عددی دو عبارت متحد بازاء جمیع مقادیر عددی حروف آنها یکی است بقسمی که میتوان اتحاد را اینطور تعریف نمود :

هرگاه مقدار عددی طرفین تساوی بازاء جمیع مقادیر عددی حروف آنها مساوی باشد آن تساوی را اتحاد خوانند .



مسئله ـ صحت اتحادهای ذیل را ثابت کنید .

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

۲۹ سه اتحاد فوق چنین بیان می شوند.

۱- مربع (مجذور) مجموع دو مقدار مساویست با مجموع مربعین آنها و باضافه ضعف حاصل ضرب آنها

۲- مربع تفاضل دو مقدار مساویست با مجموع مربعین آنها و منهای مضاعف حاصل ضرب آنها

۳- حاصل ضرب مجموع دو مقدار در تفاضل همان دو مقدار مساویست با فضل مربع مقدار اول بر مربع مقدار ثانی

۲۵ مسئله - مقدار عبارات ذیل را بدو طریق بدست آورید (طریق اول ضرب - طریق دوم استعمال سه اتحاد فوق)

$(x^x+y^y)^2 = x^{2x}+y^{2y}+2x^xy^y$ ، $(\sqrt{5}-1)^2 = 5-2\sqrt{5}+1$

$(x+4)^2 = x^2+8x+16$ $\qquad$ $(19+9)(19-9) = 19^2-9^2$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 6+2\sqrt{6}.\sqrt{2}+2 = 8+2\sqrt{12}$



$$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2 \quad , \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$$

$$(x^{3m}+11)(x^{3m}-11)\equiv x^{6m}-121 \quad , \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(a+b)-2\sqrt{ab}$$

$$(x^2-y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4 \quad , \quad (-1+\sqrt{3})^2=3-2\sqrt{3}+1$$

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{y}\right)=x$$

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}-2 \quad , \quad \sqrt[5]{a^3+b^3}\cdot\sqrt[5]{a^3-b^3}=\sqrt[5]{a^6-b^6}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)=1$$

$$(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2=11-2\sqrt{30} \quad , \quad (a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})=a^2-x$$

$$(a^4x+ax^4)(ax^4-a^4x)=a^2x^8-a^8x^2$$

$$(d^4-7)(-7+d^4)=d^8-14d^4+49 \quad , \quad (40+1)^2=1600+80+1$$

$$\left[(x-y)-c\right]\left[(x-y)+c\right]=(x-y)^2-c^2=x^2+y^2-c^2-2xy$$

$$(m^n-1)^2=m^{2n}-2m^n+1 \quad , \quad (20-7)(20+7)=400-49$$

$$54^2=2500+16+400 \quad , \quad 997\times1003=1000000-9$$

مسئله ـ مقدار $P=(x+y+z+t)^2$ را بدست آورید

حل ـ واضح است که:



$$P=\left[(x+y)+(z+t)\right]^2$$

$$(x+y)^{۲}+(z+t)^{۲}+۲(x+y)(z+t)$$

$$P=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+t^{۲}+۲xy+۲xz+۲xt+$$
$$۲yz+۲yt+۲zt$$

مسأله حساب کنید $A=(x+y+z+t)(x+y-z-t)$

حل - باید ملاحظه کرد که :

$$A=\left[(x+y)+(z+t)\right]\left[(x+y)-(z+t)\right]$$

جواب : $x^{۲}+y^{۲}-z^{۲}-t^{۲}+۲xy-۲zt$

مسئله حساب کنید $(a+b+c)(a-b+c)$ را

جواب : $a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}+۲ac$

۱۱ مسئله مقدار عبارات ذیل را از روی اتحادهای فوق بدست آورده صحت نتایج حاصله را بعمل ضرب تحقیق کنید :

عبارت	جواب
$(x^{۲}-x+۱)^{۲}$	$x^{۴}-۲x^{۳}+۳x^{۲}-۲x+۱$
$(x+y)(x-y)(x^{۲}+y^{۲})$	$x^{۴}-y^{۴}$
$(x-۲y+۱)^{۲}$	$x^{۲}+۴y^{۲}+۱+۲x-۴y-۴xy$
$(a+۲b-c)(a-۲b+c)$	$a^{۲}-(۲b-c)^{۲}$
$(۲x+\frac{۴}{x}-۳)^{۲}$	$۴x^{۲}+۲۵-\frac{۲۴}{x}-۱۲x+\frac{۱۶}{x^{۲}}$

$(a+b)^2-(c+d)^2$ $\qquad$ $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

$9x^4+15x^2y^2+16y^4$ $\qquad$ $(3x^2+3xy+4y^2)(3x^2-3xy+4y^2)$

$a^4-4(x^2-ax)^2$ $\qquad$ $(a^2+2x^2-2ax)(a^2-2x^2+2ax)$

$\frac{16y^2}{x^2}-\frac{32y}{x}+24-\frac{8x}{y}+\frac{x^2}{y^2}$ $\qquad$ $\left(\frac{4y}{x}-4+\frac{x}{y}\right)^2$

$(m^2-n^2)^2$ $\qquad$ $(m+n)(m^2-n^2)(m-n)$

$27+108x+90x^2-80x^3-60x^4+48x^5-8x^6$ $\qquad$ $(3+4x-2x^2)^3$

مسئله – تحقیق کنید که

$$(x^3-3x^2-2x-1)^3 \equiv$$

$$x^9-9x^8+21x^7+6x^6-24x^5-51x^4-41x^3-21x^2-6x-1$$

مسئله – عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$(x+y+z)^5-(x+y-z)^5-(x-y+z)^5-(z+y-x)^5$$

جواب $80xyz(x^2+y^2+z^2)$

مسئله – صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$2(x+y+z)^4+2(y+z-x)^4+2(x+y-z)^4+2(z+x-y)^4$$

$$+(2x)^4+(2y)^4+(2z)^4$$

$$\equiv 24(x^2+y^2+z^2)^2$$

طریق اثبات – باید ثابت کرد که پس از اجرای اعمال لازمه طرفین عین یکدیگر میشوند .

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv (ad-bc)^2+(ac+bd)^2$$

(طریق اثبات مانند مسئله فوق میباشد) . این اتحاد به اتحاد لاگرانژ

(Lagrange) موسوم است

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \equiv$$

$$(ax+by+cz)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3-3abc(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\equiv 0$$

۴ مسئله - صحت اتحادهای ذیل را ثابت کنید

$$\left[(3+x-2x^2)^2-(3-x+2x^2)^2\right]\left[(3+x+2x^2)^2-(3-x-2x^2)^2\right]$$

$$\equiv 144x^2(1-4x^2)$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 \equiv \left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2-6\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+9\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^2(x+a) \equiv$$

$$(a+b)(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

$$(x+y+z)^3+(x+y-z)^3+(x-y+z)^3+(x-y-z)^3 \equiv$$
$$4x(x^2+3y^2+3z^2)$$

۳ مسئله - تحقیق کنید که اگر $2p=a+b+c$ باشد :

$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2 \equiv a^2+b^2+c^2$$

$$(p-a)^3+(p-b)^3+(p-c)^3+3abc \equiv p^3$$

$$2(p-a)(p-b)(p-c)+a(p-b)(p-c)+b(p-c)(p-a)$$
$$+c(p-a)(p-b) \equiv abc$$

(باید ملاحظه کرد که $p=\frac{a+b+c}{2}$ و $p-a=\frac{b+c-a}{2}$ و غیره)

مسئله - تحقیق کنید که :

$$(a\alpha+c\beta+b\gamma)^3+(b\alpha+a\beta+c\gamma)^3+(c\alpha+b\beta+a\gamma)^3-$$
$$3(a\alpha+c\beta+b\gamma)(b\alpha+a\beta+c\gamma)(c\alpha+b\beta+a\gamma) \equiv$$
$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma)$$

مسئله - تحقیق کنید که اگر $s=a+b+c$ باشد :

$$(s-2a)^3+(s-2b)^3+(s-2c)^3-3(s-2a)(s-2b)(s-2c)=0$$

مسئله - مجموع دو عدد ۵ و تفاضلشان ۱ فضل مربع بزرگتر بر مجذور کوچکتر چقدر است

(جواب ۵)

مسئله - مجموع و تفاضل دو عدد بترتیب ۱۸ و ۴ است حاصلضرب آنها را معلوم کنید

(جواب ۷۷)

مسئله - اگر $(x+y)^2=2500$ و $xy=600$ باشد $x-y$ چقدر است (ج ۱۰)

مسئله - بنابر آنکه $x+y=10$ و $xy=24$ باشد x^3+y^3 را حساب کنید

طریق حل - باید اتحاد $(x+y)^3\equiv(x^3+y^3)+3xy(x+y)$ را استعمال کرد

(جواب ۲۸۰)

مسئله - مجموع دو عدد ده و مجموع مکعباتشان ۲۸۰ حاصل ضرب آنها را تعیین کنید

(جواب ۲۴)

مسئله - مجموع دو عدد ۱۰ و تفاضلشان ۶ است آن دو عدد کدامند

طریق حل - اگر x و y اعداد مطلوب باشند بنا بفرض $x+y=10$ و $x-y=6$

حال این دو تساوی را جمع و تفریق میکنیم و ...... (جواب ۸ و ۲)

مسئله - ثابت کنید که مجموع هر عدد صحیح و مجذورش بر ۲ قابل قسمت است

برهان - فرض کنیم n عدد صحیح مفروض باشد واضحست که $n^2+n=n(n+1)$

طرف ثانی حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است و چون یکی از دو عدد صحیح متوالی بر دو قابل قسمت است $n(n+1)$ نیز بر دو قابل قسمت خواهد بود ممکن است باین طریق استدلال کنیم: اولاً اگر عدد مفروض زوج باشد مجذورش نیز زوج بوده و مجموع دو عدد زوج نیز زوج است ثانیاً اگر عدد مفروض فرد باشد مجذورش نیز فرد بوده و مجموع دو عدد فرد زوج خواهد بود

مسئله - ثابت کنید که اگر a فرد باشد a^2+2 و $a(a^2+4)$ فرد و a^2+1 , a^2-1 و $a(a^2+3)$ زوج هستند

مسئله - ثابت کنید که اگر تفاوت دو عدد ۲ باشد تفاضل مجذورات آنها بچهار قابل قسمت است.

اثبات - باید ملاحظه کرد که: $(n+2)^2 - n^2 \equiv 4(1+n)$

تقسیم دو کثیر الجمله - طریق عملی برای تقسیم دو کثیر الجمله از قرار ذیل است

۱ - مقسوم و مقسوم علیه را برحسب قوای صعودی یا نزولی یکی از حروف مشترک مرتب میکنیم.

۲ - جمله اول مقسوم را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم مینمائیم خارج قسمت جمله اول خارج قسمت دو کثیر الجمله است



۲ ـ جمله اول خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از مقسوم میکاهیم .

۳ ـ اگر باقیمانده موجود بود آنرا مقسوم جدیدی ملاحظه کرده عمل را بقاعده فوق مداومت میدهیم تا وقتی که باقیمانده صفر شود یا درجه اش بحسب حرفی که نسبت بآن مرتب شده است از درجه مقسوم علیه نسبت بآن حرف کمتر باشد .

مسئله ـ میخواهیم کثیرالجمله $x^4+3x^3+x^2-5x-1$ را بر x^2-x+1 تقسیم کنیم

حل ـ صورت عمل بقرار ذیل است :

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+3x^3+x^2-5x-1 & x^2-x+1 \\
\underline{x^4-x^3+x^2} & \overline{x^2+4x+4} \\
4x^3 \qquad -5x-1 & \\
\underline{4x^3-4x^2+4x} & \\
4x^2-9x-1 & \\
\underline{4x^2-4x+4} & \\
-5x-5 &
\end{array}
$$



توضیح ـ جمله اول مقسوم (x^4) را بر جمله اول مقسوم علیه (x^2) قسمت نمودیم خارج قسمت x^2 شد آنرا در مقسوم علیه ضرب کرده حاصل ضرب

$(x^4 - x^3 + x^2)$ را از مقسوم علیه نقصان نمودیم

$-5x - 4x^3 - 1$ باقیمانده این باقیمانده را مقسوم جدید ملاحظه کرده

جمله اول آن $4x^3$ را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کردیم خارج قسمت

$4x$ شد آنرا در جمل مقسوم علیه ضرب کرده حاصل ضرب را از مقسوم جدید

کاستیم $-1 - 9x - 4x^2$ باقیمانده بالاخره جمله اول این باقیمانده را بر

x^2 تقسیم نموده خارج قسمت یعنی ۴ را در $x^2 - x + 1$ ضرب کرده

حاصل ضرب را از مقسوم جدید یعنی $-1 - 9x - 4x^2$ کم کردیم $-5 - 5x$

باقیماند

مسئله میخواهیم مجموع $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ را بر $x + y + z$ تقسیم کنیم

حل ابتدا دو کثیرالجمله را برحسب قوای نزولی یکی از حروف مثلاً x

مرتب میکنیم صورت عمل چنین است :

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3xyz + y^3 + z^3 & x + y + z \\
\hline
x^3 + x^2y + x^2z & x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2 \\
\hline
-x^2y - x^2z - 3xyz + y^3 + z^3 & \\
-x^2y - xy^2 - xyz & \\
\hline
-x^2z + xy^2 - 2xyz + y^3 + z^3 & \\
-x^2z - xz^2 - xyz & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
xy^2 - xyz + xz^2 + y^3 + z^3 \\
xy^2 \qquad\qquad\qquad + y^3 + y^2z \\
\hline
-xyz + xz^2 - y^2z + z^3 \\
-xyz - z^2y - y^2z \\
\hline
xz^2 + z^2y + z^3 \\
xz^2 + z^2y + z^3 \\
\hline
\end{array}
$$

۲۷ مسئله خارج قسمت هر یک از تقسیم های ذیل را بدست آورید

مقسوم	مقسوم علیه	جواب
$x^2 - 625$	$x + 25$	$x - 25$
$a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$	$a + b$
$x^3 - 125$	$x^2 + 5x + 25$	$x - 5$
$x^2 + 15x + 56$	$x + 7$	$x + 8$
$6x^2 - 16xy + 8y^2$	$3x - 2y$	$2x - 4y$
$x^2 - 15x + 56$	$x - 7$	$x - 8$
$6a^3 - 19a^2 + 25$	$3a^2 - 2a - 5$	$2a - 5$
$8x^2 - 26xy + 21y^2$	$2x - 3y$	$4x - 7y$
$x^3 - 5x^2 - x + 5$	$(x+1)(x-5)$	$x - 1$
$x^2 - 2xy - 24y^2$	$x + 4y$	$x - 6y$
$a^4 - 6a^2 + 8a - 3$	$(a-1)^3$	$a + 3$
$4x^2 - 25y^2$	$2x + 5y$	$2x - 5y$
$x^4 + x^2 + 1$	$x^2 + x + 1$	$x^2 - x + 1$
$24x^2 - 65xy + 21y^2$	$8x - 3y$	$3x - 7y$
$(x^2 + x + 1)^2 + 1$	$(x+1)^2 + 1$	$x^2 + 1$
$m^3 - n^3$	$m - n$	$m^2 + mn + n^2$
$8x^9 + 729$	$4x^6 - 18x^3 + 81$	$2x^3 + 9$



۲۸ مسئله - بعمل تقسیم ثابت کنید که :

$m^4 - m^3 + m - 1 : m^3 + 1 = m - 1$

$6x^7 - 3x^5 + 24x^2 - 12 : 2x^2 - 1 = 3x^5 + 12$

$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 : a + b - c = a - b + c$

$2a^3 - 9a^2 + 11a - 3 : 2a - 3 = a^2 - 3a + 1$

$x^4 - x^2 + 2x - 4 : x^2 + x - 2 = x^2 - x + 2$

$x^4 - 3x^3 + 3x - 1 : x^2 - 3x + 1 = x^2 - 1$

$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 : a + b - c = a + b + c$

$x^4 - 16y^4 : x - 2y = x^3 + 2x^2y + 4xy^2 + 8y^3$

$125x^6 - 64y^3 : 5x^2 - 4y = 25x^4 + 20x^2y + 16y^2$

$x^4 - 56x + 15 : 1 - 4x + x^2 = x^2 + 4x + 15$

$x^4 + 4 : x^2 - 2x + 2 = x^2 + 2x + 2$

$x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 3 : x^2 - 2x + 3 = x^2 + x + 1$

$13x + 1 + 47x^2 + 35x^3 : 5x + 1 = 7x^2 + 8x + 1$

$2x^2 + ax - 6bx - 3ab : (2x + a) = x - 3b$

$1 - 32x^5 : 1 - 2x = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4$

$16x^4 + 9 + 25x^2 : -2x + 3 + 5x^2 = 3 + 2x + 5x^2$

$16 + 40y + 25y^2 - 49y^4 : 4 + 5y - 7y^2 = 4 + 5y + 7y^2$

$x^3 - y^3 + x^2 + xy + y^2 : x^2 + xy + y^2 = x - y + 1$

$32a^5 + b^5 : 2a + b = 16a^4 - 8a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$

$x^3 - 6x + 9 : x^2 - 3x + 3 = x + 3$

$4x^2 + 4xy + y^2 - a^2 : 2x + y - a = 2x + y + a$

$6x^3y - 17x^2y^2 + 14xy^3 - 3y^4 : (2x - 3y) = 3x^2y - 4xy^2 + y^3$

$a^3 + 8 - 125b^3 + 30ab : a - 5b + 2 = a^2 + 25b^2 + 4 + 10b - 2a + 5ab$

$3x^5 - 35x^4 + 64x^3 - 40x^2 + 8x : x^3 - 10x^2 + 4x = 3x^2 - 5x + 2$

$1 + x + y - xy - x^2y - xy^2 : 1 - xy = 1 + x + y$

$81x^8 - 16y^8 : 3x^2 - 2y^2 = 27x^6 + 18x^4y^2 + 12x^2y^4 + 8y^6$

$x^{15}y^8 - x^8y^{15} : (x - y) = x^8y^8(x^6 + x^5y + x^4y^2 + \dots + y^6)$

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} : 1 - x^5 + x^6 =$

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9$

$$\frac{ax-ay-bx+by+cx-cy}{a-b+c}=x-y$$

$$\frac{125a^6b^{12}-343c^9}{25a^4b^8+35a^2b^4c^3+49c^6}=5a^2b^4+7c^3$$

$$\frac{32x^5+243}{2x+3}=16x^4-24x^3+36x^2-54x+81$$

$$\frac{x^4+x^3+7x^2-6x+8}{x^2+2x+8}=x^2-x+1$$

$$\frac{x^5+x^3+7x^2-17x-42}{x^2-x-2}=x^3+x^2+4x+13$$

$$\frac{18-9y-71y^3+28y^4-35y^2}{4y^2+6-13y}=7y^2+5y+3$$

$$\frac{a^{12}+2a^6b^6+b^{12}}{a^4+2a^2b^2+b^4}=a^8-2a^6b^2+3a^4b^4-2a^2b^6+b^8$$

$$\frac{1-32x^5}{1+8x^3+2x+16x^4+4x^2}=1-2x$$

$$\frac{2m^4n^4+18m^4n^3+12m^5n^3-3m^6n^3-36m^2n^4-22m^3n^4+8m^2n^5}{6m^3n^2-12mn^3}$$

$$=3mn+2m^2n-\frac{2}{3}mn^2-\frac{1}{2}m^3n$$

مسئله- مطلوبست خارج قسمت هریک از تقسیمهای ذیل :

مقسوم	مقسوم علیه
$a^3+b^3-3ab+1$	$a^2+b^2+1-ab-a-b$
$x^{4m}+x^{2m}y^{2n}+y^{4n}$	$x^{2m}+x^my^n+y^{2n}$
$a^4+4a^3+6a^2+4a+1$	a^3+3a^2+3a+1

$3a^3+a-6a^2b-2b$ $\qquad$ $3a^2+1$

$2x^3+2y^3+2z^3-6xyz$ $\qquad$ $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$

$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$ $\qquad$ $(b+c)(c+a)(a+b)$

$axy-2ay^2-2a^2x+4a^2y+3ayz-6a^2z$ $\qquad$ $x-2y+3z$.

جواب بترتیب : $(a+b+1)$ و $(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})$

و $(a+1)$ و $(a-2b)$ و $(x+y+z)$ و $(a^2+b^2+c^2$

$+bc+ca+ab)$ و $(ay-2a^2)$

مسئله — مطلوبست خارج قسمت تقسیم $x^3-(q^2+1)x+q$ بر x^2+qx-1

جواب $(x-q)$

مسئله تحقیق کنید که : $2y^4-y^3+4y-2:(y^3+2)=2y-1$

$x^3+2x^2-11x-12:(x+1)(x-3)(x+4)=1$

مسئله ثابت کنید که : $\dfrac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ax+by}=bx+ay$

$\{[(x^8-y^8):(x^4+y^4)]:(x^2+y^2)\}:(x+y)=x-y$

$a^2x+abx+ac+aby+b^2y+bc:a+b=ax+by+c$

$[(a^9-64a^3-a^6+64):(a^2-4)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4)]=a^3-1$

$$\frac{25x^6-10x^5-29x^4+26x^3+5x^2-12x+4}{5x^3-x^2-3x+2}=5x^3-x^2-3x+2$$

$B=a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd$ سـ

و $a^3+b^3+c^3+d^3-3(bcd+cda+dab+abc)$ باشد

$\frac{A}{B}$ را حساب کنید

(جواب $a+b+c+d$)

مسئله - تحقیق کنید که:

$$\frac{2x^{4n+2}-11x^{4n+1}+20x^{4n}-15x^{4n-1}+7x^{4n-2}-x^{4n-3}}{x^{n+1}-3x^{n}+2x^{n-1}-x^{n-2}}=2x^{3n+1}-5x^{3n}+x^{3n-1}$$

اتحادهای ذیل را باید همیشه در خاطر داشت:

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}\equiv a-b$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}\equiv a+b$$

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}\equiv a^2-ab+b^2$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}\equiv a^2+ab+b^2$$

این چهار اتحاد چنین بیان می‌شوند:

۱ - خارج قسمت تفاضل مربع دو مقدار بر مجموع (تفاضل) آن دو مقدار مساویست با تفاضل (مجموع) آنها



۲ - مجموع مکعبات دو مقدار بر مجموع آنها قابل قسمت است و خارج قسمت مساویست با فضل مجموع مربعین آندو بر حاصل ضربشان

۳ - تفاضل مکعبات دو مقدار بر تفاضل آنها قابل قسمت است و خارج قسمت مساویست با مجموع مربعین آندو بعلاوه حاصل ضرب آنها

۲۹ مسئله - خارج قسمت تقسیم های ذیل را بدون اجرای عمل تقسیم بدست آورید

مقسوم	مقسوم علیه	جواب
$۵^۲-۲^۲$		$۵-۲$
$x^۲-۱$	$x-۱$	$x+۱$
$x^۲-۹$	$x+۳$	$x-۳$
$۴x^۲-۹y^۲$	$۲x-۳y$	$۲x+۳y$
$x^۴-y^۴$	$-y^۲+x^۲$	$x^۲+y^۲$
$x^۴-y^۴$	$x^۲+y^۲$	$x^۲-y^۲$
$x^۴-۱$	$۱+x^۲$	$x^۲-۱$
$x^۲-۶۴$	$x+۸$	$x-۸$
$۱۰۰۰۰-۱۰۰$	$۱۰۰-۱۰$	$۱۰۰+۱۰$
$۴a^۲b^۲-۲۵c^۲d^۲$	$۲ab-۵cd$	$۲ab+۵cd$
$x^۳-۱$	$x-۱$	$x^۲+x+۱$
$(a+b)^۲-(x-y)^۲$	$(a+b)+(x-y)$	$a+b-x+y$
$a^۳+۲۷$	$a+۳$	$a^۲+۳a+۹$
$(a+b+c)^۲-۱$	$a+b+c+۱$	$a+b+c-۱$
$a^۳-۸$	$a-۲$	$a^۲+۲a+۴$
$a^۹-۲۷b^۳$	$a^۳-۳b$	$a^۶+۳a^۳b+۹b^۲$
$۱۰۰۰-۸$	۸	$۱۰۰+۸۰+۶۴$
$b^۳x^۹-۱۲۵$	$bx^۳-۵$	$b^۲x^۶+۵bx^۳+۲۵$

$(2x+3y)^2-(x-4y)^2$	$x+2y$	$3x-y$
$a^{4m}-b^{2n}$	$a^{2m}-b^{n}$	$a^{2m}+b^{n}$
a^6-b^6	$a^4+a^2b^2+b^4$	a^2-b^2
$a^{3m}-b^{3n}$	a^m-b^n	$a^{2m}+a^mb^n+b^{2n}$
$512+x^9$	$64-8x^3+x^6$	$8+x^3$
$2-1$	$\sqrt[3]{2}-1$	$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$
x^3-64	$x^2+4x+16$	$x-4$
$(a+b)^3+c^3$	$a+b+c$	$(a+b)^2-c(a+b)+c^2$
$8a^6b^3+125x^3y^9$	$2a^2b+5xy^3$	$4a^4b^2+10a^2bxy^3+25x^2y^6$
$(a+2b)^2-9c^2$	$a+2b+3c$	$a+2b-3c$
$1-64c^6$	$1-4c^2$	$1+4c^2+16c^4$

مسئله مطلوبست خارج قسمت تقسیم $1-x^{12}$ بر $1-x^4$

حل - فرض کنیم $z=x^4$ نتیجه میشود:

$$\frac{x^{12}-1}{x^4-1}=\frac{z^3-1}{z-1}=z^2+z+1$$

حال اگر بجای z در کثیر الجمله اخیر x^4 قرار دهیم حاصل میشود

$$\frac{x^{12}-1}{x^4-1}=x^8+x^4+1$$

مسئله - a نفر عمله که در روز h ساعت کار میکنند حوضی بشکل مکعب مستطیل را که ابعادش α و β و γ هستند در n روز حفر کرده اند معلوم کنید a' نفر عمله که در روز h' ساعت کار میکنند در چند روز حوضی را که ابعادش a و b و c باشد حفر مینمایند (جواب x)



مسئله - میخواهیم خارج قسمت تقسیم $x^6+x^5-2x^4+6x^3-5x^2+4x-1$ بر $x^4-x^3+x^2$ را تا ۵ جمله بدست آوریم

حل - صورت عمل از اینقرار است :

$$
\begin{array}{r|l}
x^6+x^5-2x^4+6x^3-5x^2+4x-1 & x^4-x^3+x^2 \\ \hline
2x^5-3x^4+6x^3-5x^2+4x-1 & x^2+2x-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2} \\
-x^4+4x^3-5x^2+4x-1 & \\
3x^3-4x^2+4x-1 & \\
-x^2+x-1 &
\end{array}
$$

توضیح - بعد از اینکه بباقیمانده $3x^3-4x^2+4x-1$ رسیدیم عمل تقسیم را بقواعد سابق امتداد داده‌ایم خارج قسمت جمله اول این کثیر الجمله بر x^4 عبارت است از $3x^3:x^4=\frac{3}{x}$ این مقدار را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل ضرب را از $3x^3-4x+4x-1$ کم کردیم وقس علیهذا الی آخره

مسئله - ده جمله خارج قسمت تقسیم ۱ بر $x-1$ را بدست آورید

حل - صورت عمل از اینقرار است



1	$1-x$
x	$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$
x^2	
x^3	
x^4	
$\cdots$	

چنانکه دیده میشود جملهٔ اول خارج قسمت $x^0=1$ و جملهٔ دوم آن x^1 و جملهٔ سوم آن x^2 است وقس علیهذا الی آخر تقسیم که جملهٔ n ام خارج قسمت x^{n-1} خواهد بود بنابراین اگر n جملهٔ خارج قسمت را به q بنمائیم :

$$q=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}$$

اگر ملاحظه کنیم که باقیمانده که پس از تعیین x^{n-1} بدست میآید x^n است این اتحاد نتیجه میشود

$$1\equiv(1-x)(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})+x^n$$

(زیرا مقسوم مساوی است با حاصل ضرب مقسوم علیه و خارج قسمت بعلاوه باقیمانده)

مسئله صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید :

$$(1-x+2x^2)\equiv(1-x-x^2)(1+3x^2)+3x^3(x+1)$$

طریق اول - کافی است مثال لازمه را در طرف ثانی مجری داشته ملاحظه کنیم که حاصل عین طرف اول است .

طریق دوم - خارج قسمت $1-x+2x^2$ بر $1-x-x^2$ را تا دو جمله حساب میکنیم باینصورت :

$1-x+2x^2$	$1-x-x^2$
$3x^2$	$1+3x^2$

$$3x^3+3x^4=3x^3(x+1)$$

بنابراین

$$1-x+2x^2 \equiv (1-x-x^2)(1+3x^2)+3x^3(x+1)$$

۲۴ مسئله - تحقیق کنید که :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots\dots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots\dots$$

$$\frac{1}{1-5x}=1+5x+25x^2+\dots\dots$$

$$\frac{1}{1+3x}=1-3x+9x^2-27x^3+\dots\dots$$

$$\frac{10}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\dots\dots$$

$$\frac{1+x}{1-2x}=1+3x+6x^2+12x^3+\dots\dots$$

$$\frac{1+3x}{1-2x}=1+5x+10x^2+20x^3+\dots\dots$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^2}=1+3x+5x^2+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{1+x}{1+3x}=1-2x+6x^2-\cdots\cdots$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}=1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^3}+\cdots\cdots$$

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\cdots\cdots$$

$$\frac{ay}{by-1}=\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2y}+\frac{a}{b^3y^2}+\cdots\cdots$$

$$\frac{1+3x}{x-2x^2}=x^{-1}+5+10x+20x^5+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3b^2}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\cdots\cdots$$

$$(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{1+2x}{1-x^2}=1+2x+x^2+2x^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{2x}{x^3+1}=2\left(x-x^4+x^7-\cdots\cdots\right)$$

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\cdots\cdots$$

$$\frac{2x+1}{x^2+x+1}=1+x-2x^2+\cdots\cdots$$

$$\frac{3x^2+x}{x^3-1}=\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\cdots\cdots$$

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\cdots\cdots$$



$$\frac{2+3x}{1+x+x^2} = 2 + x - 3x^2 + 2x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1-2x+2x^2}{1+3x-4x^2} = 1 - 5x + 21x^2 - 83x^3 + 333x^4 - \dots$$

مسئله — $x^n - y^n$ را بر $x - y$ تقسیم کنید

حل — صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{l|l} x^n - y^n & x-y \\ \underline{x^n - x^{n-1}y} & x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots \\ \quad x^{n-1}y - y^n & \\ \quad \underline{x^{n-1}y - x^{n-2}y^2} & \\ \qquad x^{n-2}y^2 - y^n & \\ \qquad \underline{x^{n-2}y^2 - x^{n-3}y^3} & \\ \qquad\quad x^{n-3}y^3 - y^n & \\ \qquad\quad \dots\dots & \\ \qquad\quad \dots\dots & \\ \qquad\quad \dots\dots & \\ \qquad\quad \dots\dots & \end{array}$$

چنانکه دیده میشود اولاً مجموع نماینده x و y در جمله اول باقیمانده n است ثانیاً نماینده y در هر باقیمانده معادل مرتبه آن باقیمانده میباشد مثلاً نماینده y در باقیمانده دوم ($x^{n-2}y^2$) ۲ و در باقیمانده سوم ($x^{n-3}y^3$) سه میباشد :

از اینرو معلوم میشود که جمله اول باقیمانده $n-1$ ام عبارتست از

$x.y^{n-1}$ و بنابراین :

باقیمانده $n-1$ ام $= xy^{n-1}-y^{n}$ حال عمل تقسیم را

امتداد میدهیم باینصورت :

$$
\begin{array}{l|l}
x^{n}-y^{n} & x-y \\
\cline{2-2}
x^{n}-x^{n-1}y & x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+y^{n-1} \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots & \\
xy^{n-1}-y^{n} & \\
xy^{n-1}-y^{n} & \\
\hline
\end{array}
$$

چنانکه دیده میشود در خارج قسمت نماینده y از صفر شروع و ترقی نموده

و به $n-1$ ختم شده است بنابراین خارج قسمت n جمله دارد

از اینجا دو اتحاد ذیل بدست میآید :

$$\frac{x^{n}-y^{n}}{x-y} \equiv x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}+\cdots+y^{n-1}.$$

$$x^{n}-y^{n} \equiv (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+y^{n-1})$$

مثلاً $\frac{x^{3}-y^{3}}{x-y} = x^{3-1}+x^{3-2}y+x^{3-3}y^{2} = x^{2}+xy+y^{2}$



$$\frac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+ab^4+b^4$$

(متعلمین باید اتحادهای فوق را همیشه در خاطر داشته باشند . —)

۳۲ـ از مسئلهٔ فوق قضیهٔ ذیل نتیجه میشود :

قضیه — x^n-y^n همیشه بر $x-y$ قابل قسمت است

۳۳ـ صحت اتحادهای ذیل را بدو طریق ثابت کنید (طریق اول تقسیم طریق دوم استعمال اتحادهای فوق)

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3$$

$$\frac{x^6-y^6}{x-y}=x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$$

$$\frac{x^7-y^7}{x-y}=x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6$$

۳۴ـ ثابت کنید که :

$$(x^n-1):(x-1)=x^{n-1}+x^{n-2}+\dots\dots+1$$

۳۵ـ ذکر چند نتیجهٔ مهم

اولاً فرض کنیم n فرد باشد . اگر در اتحاد

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots\dots+y^{n-1}$$

y را به $-y$ تبدیل کنیم حاصل میشود :

$$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots\dots+y^{n-1}$$

(فقط علامت جمله‌ئیکه نماینده y در آنها فرد باشد تغییر میکند) یعنی وقتیکه n فرد باشد x^n+y^n به $x+y$ قابل قسمت است مثلاً:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$$

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$$

ثانیاً فرض میکنیم n زوج باشد چون در همان اتحاد y را به $-y$ تبدیل کنیم حاصل میشود:

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots-y^{n-1}$$

یعنی وقتی n زوج باشد x^n-y^n بر $x+y$ قابل قسمت است

مثلاً:

$$\frac{x^6-y^6}{x+y}=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$$

۳۴ تعریف — کثیرالجمله را نسبت بیکی از حروفش صحیح خوانند وقتی منهای مسکل آن نسبت بآن حرف صحیح ومنطق باشد مثلاً کثیرالجمله‌ها است

ax^n-mx و $ax^4-3x^3+2x^2+x+1$ و $2x^2-x+1$

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots+kx+l$$

نسبت بحرف x میخوانند

وقتی کثیرالجمله نسبت بیکی از حروفش صحیح باشند بالاترین نماینده آنحرف را در کثیرالجمله درجه کثیرالجمله نسبت بآنحرف خوانند مثلا کثیرالجمله $2+5y-2y^3$ نسبت به y از درجه سوم و کثیرالجمله $ax^m+bx^{m-1}+c$ نسبت به x از درجه m ام است. کثیرالجمله

$$ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots+kx+l$$

را در آن ضرایب a و b و c و ... و k و l مخالف صفر فرض شده اند کثیرالجمله کامل نسبت به x خوانند

اگر بعضی از این ضرایب صفر باشند کثیرالجمله نسبت بحرف x ناقص است مثلا کثیرالجمله های $2x^2+5x-7$ و $7x^3-14x^2+5x-1$ نسبت بحرف x کامل و کثیرالجمله های x^n-y^n و $2x^5-x-1$ نسبت بحرف x ناقصند

(۳۸)- قرارداد — من بعد کثیرالجمله را که مشتمل بر a یا x یا y یا ...... وغیره باشد بعلامت $f(a)$ یا $f(x)$ یا $f(y)$ یا ...... وغیره مینمائیم

مثلاً:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(a)=a^3+a^2+a+1$$

$$f(y)=5y^5-3y^4+y-1$$

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots+kx+l$$

مقدار عددی $f(x)$ را بازاء $x=\alpha$ به $f(\alpha)$ مینمائیم:

مسئله - بنابرآنکه $f(x)=x^2-x+1$ باشد $f(0)$ و $f(1)$ و $f(\frac{1}{2})$ را حساب کنید

حل - موافق قرارداد فوق مقصود از $f(0)$ مقدار عددی x^2-x+1 است بازاء $x=0$ بنابراین $f(0)=0^2-0+1=1$ و نیز

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$ و $f(1)=1-1+1=1$

مسئله - بنابرآنکه $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$ باشد $f(0)$ و $f(2)$ را حساب کنید (جواب ۳۰- و ۰)

مسئله - بنابرآنکه $f(x)=x^3-10x^2+31x-30$ باشد تحقیق کنید که

$f(3)=f(5)$ ، $f(-1)=6f(4)$ .. و $f(1)>f(-3)$

مسئله - اگر $f(x)=\frac{2x-3}{x+7}$ باشد $f(\sqrt{2})$ چقدر است

(جواب ۰٫۰۲۰۴-)

مسئله - بنابرآنکه $f(y)=a^3-ax^2+a^2x$ باشد $f(a)$ را حساب کنید

حل - $f(a)=a^3-a.a^2+a^2.a=a^3$



مسئله ـ برآنکه $f(x)=x^3+x+1$ باشد $f(x-2)$ و $f(a)$ را تعیین کنید

(جواب $x^3-6x^2+13x-9$ و a^3+a+1)

مسئله ـ تحقیق کنید که اگر $f(u)=u^{2m}+u^{2n}+1$ باشد $f(0)=1$ و $f(1)=3$

$$f(-a)=f(a)$$

مسئله ـ کثیرالجمله $f(\delta)=\delta(\delta-1)(\delta-\frac{1}{2})(\delta+\frac{1}{a})$ مفروض است تحقیق کنید که

$$0=f(0)=f(1)=f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{a})$$

$$f(\frac{1}{a})=\frac{2}{a^2}(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{a}-\frac{1}{2})$$

قضیه ۳ ـ باقیمانده تقسیم یک کثیرالجمله مانند $f(x)$ بر $x-a$ عبارتست از $f(a)$

قبل از اثبات این قضیه صحت آنرا بوسیله چند مثال توضیح میدهیم

مثال ۱ بوسیله تقسیم معلوم میشود که باقیمانده تقسیم x^2+x-3 بر $x-2$ مساوی ۳ است خلاصه: $3=2^2+2-3=f(2)$

مثال ۲ باقیمانده تقسیم $f(x)=x^3-x^2-x+1$ بر $x-1$ صفر است خلاصه. $f(1)=1-1-1+1=0$



مثال ۳ باقیمانده تقسیم $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{8}+1$ بر $x+\frac{1}{2}$

میباشد $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{32} + 1 = \frac{1}{32}$ ۱

برهان - فرض کنیم Q خارج قسمت و R باقیمانده تقسیم $f(x)$ باشد بر $x-a$. چون مقسوم علیه نسبت به x از درجه اول است R شامل x نخواهد بود . خلاصه

$$f(x) \equiv (x-a)Q + R$$

بنابر تعریف اتحاد باید طرفین این رابطه بازاء جمیع مقادیر x محقق باشد فرض کنیم $x=a$ نتیجه میشود

$$f(a) \equiv (a-a)Q + R$$

(چون R شامل x نبوده تغییر نمیکند) یا :

$$f(a) = R$$

وقتی $f(x)$ به $x-a$ قابل قسمت باشد باقیمانده تقسیم صفر است یعنی $f(a)=0$ و از اینجا قضیه ذیل نتیجه میشود :

۳۷ - قضیه - اگر کثیر الجمله $f(x)$ بر $x-a$ قابل قسمت باشد $f(a)=0$ است

بالعکس اگر $f(a)=0$ باشد $f(x)$ بر $x-a$ قابل قسمت است

اثبات ـ برای اثبات کافی است مبرهن کنیم که باقیمانده تقسیم $f(x)$ به $x-a$ صفر است . خلاصه فرض کنیم Q خارج قسمت و R باقیمانده تقسیم $f(x)$ به $x-a$ باشد پس :

$$f(x) \equiv (x-a)Q + R$$

حال اگر در طرفین این اتحاد بجای x ، a قرار داده ملاحظه کنیم که $f(a)=$ نتیجه میشود $R=0$

مثال ـ اگر $f(x)=x^3+x^2-x-1$ باشد $f(1)=0$ است پس $f(x)$ قابل قسمت است به $x-1$

امتحان :

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-x-1 & x-1 \\ \hline 2x^2-x-1 & x^2+2x+1 \\ x-1 & \\ 0 & \end{array}$$

مثال ۲ اگر $f(x)=x^n-y^n$ باشد $f(y)=0$ است پس x^n-y^n به $x-y$ قابل قسمت است و همطلب را سابقاً دیده‌ایم

مثال ۳ ـ فرض کنیم $f(t)=t^2+2t+1$ واضح است که $f(-1)=0$ شد پس $f(t)$ به $t+1$ قابل قسمت میباشد

مثال ۴ باقیمانده تقسیم $f(x)=x^n+y^n$ بر $x-a$



عبارتست از : $f(-y)=(-y)^n+y^n$

ازاینرو واضحست که اگر n زوج باشد $f(-y)=2y^n$ میشود و اگر n فرد باشد حاصل میشود $f(-y)=0$ یعنی دراینحالت $f(x)$ بر $x+y$ قابل قسمت است و اینمطلب سابقاً هم مذکور شد .

۱۸ مسئله ـ باقیمانده هریک از تقسیم های ذیل را بدون اجرای عمل تقسیم تعیین کنید

مقسوم	مقسوم علیه	جواب و باقیمانده
x^2-2x+1	$x-1$	0
$3x^3-4x^2-23x+9$	$x-4$	45
x^3-x^2+1	$x-2$	3
x^4-2x^3+x-7	$x+2$	23
$x^5-3x^3+x^2+7$	$x-1$	6
$x^4-5x^3+4x^2+2x-6$	$x+2$	62
$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$	$x-a$	0
x^7-9x^3+2x-4	$x-3$	1946
$a^5-3b(a+b)^2-b^5$	$a-b$	$-6b^2$
$x^3+3x^2-13x-15$	$x+5$	0
$x^4-2a^2x^2+a^4$	$x-a^2$	$a^8+a^4-2a^6$
$2x^4-45x^2-9x-7$	$x-5$	73
$ax^2+2bx+c$	$x+\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$	0
$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$	$a-b$	0
x^4-1	$x-1$	
$x^4-2x^3-9x^2+2$	$x-4$	-14
$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2b^2a^2$	$a+(b-c)$	0
$x^3+y^3+z^3-3xyz$	$x+(y+z)$	0



۳۸ - متعلمین باید قضایای ذیل را در خاطر داشته باشند :

۱ - اگر کثیر الجمله $f(x)$ به $(x-a)^n$ و $(x-b)^p$ و $(x-c)^m$ ..... وغیره قابل قسمت باشد بحاصل ضرب آنها نیز قابل قسمت است .

۲ - اگر عبارتی که نسبت بیک حرف از درجه m ام است بازاء بیش از m مقدار آن حرف صفر شود متحد باصفر است

۳ - وقتی دو کثیر الجمله که نسبت بقوای یک حرف مرتب شده اند متحد باشند ضرایب قوای متساویه آن حرف در دو کثیر الجمله مساوی است یعنی اگر :

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv bx^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n \quad (1)$$

باشد : $a=b$ و $a_1=b_1$ و .... و $a_n=b_n$

زیرا چون در طرفین اتحاد فوق بجای x صفر قرار دهیم نتیجه می شود $a_n=b_n$
پس اتحاد (۱) باینصورت بیرون میآید

$$ax^n + \dots + a_{n-1}x + a_n \equiv bx^n + \dots + b_{n-1}x + a_n$$

حال اگر از طرفین a_n را نقصان نموده طرفین تساوی حاصل را به x تقسیم کنیم اتحاد ذیل نتیجه میشود :

$$ax^{n-1} + \dots + a_{n-1} \equiv bx^{n-1} + \dots + b_{n-1}$$

که چون در طرفینش بجای x صفر قرار دهیم حاصل میشود $a_{n-1} = b_{n-1}$

و قس علیهذا برای اثبات تساوی سایر ضرایب

مسئله مقدار a را بقسمی تعیین کنید که $2x^2 - 5x + 2 \equiv a(x-2)(x-\frac{1}{2})$

حل - اعمال لازمه در طرف ثانی را بجا میاوریم حاصل میشود $2x^2 - 5x + 2$

$\equiv ax^2 - \frac{5a}{2}x + a$ خلاصه چون این دو عبارت متحدند بنابه تعریف

فوق باید ضریب x^2 در طرف اول مساوی ضریب x^2 در طرف ثانی

باشد یعنی $a = 2$

مطلوب است خارج قسمت و باقیمانده تقسیم کثیرالجمله $x^4 + 2x^2 - 7x + 1$

بر $x^2 - 1$ بدون اجرای عمل تقسیم

حل - چون مقسوم علیه از درجهٔ دوم است خارج قسمت نیز از درجهٔ دوم

و باقیمانده از درجهٔ اول خواهد بود پس فرض کنیم $ax^2 + bx + c$ خارج

قسمت و $dx + e$ باقیمانده باشد. مقصود تعیین a و b و c و d و e است

بدون اجرای عمل تقسیم برای اینکار بطریق ذیل عمل میکنیم: واضحست که

$$x^4 + 2x^2 - 7x + 1 \equiv (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e$$

یا پس از مرتب کردن طرف ثانی بحسب قوای نزولی x:



$$x^4+2x^2-7x+1\equiv ax^4+bx^3+(c-a)x+dx+(e-c)$$

برای اینکه این اتحاد برقرار باشد باید $a=1$ و $b=0$ و $c-a=2$ و $d=-7$ و $e-c=1$ باشد خلاصه $c-a=c-1=2$ پس $c=3$ و چون $e-3=1$ است پس $e=4$ میباشد نتیجه که خارج قسمت مطلوب x^2+3 و باقیمانده $-7x+4$ است

مسئله مطلوبست خارج قسمت و باقیمانده تقسیم x^5-1 بر x^2+2x-1 بدون اجرای عمل تقسیم

حل - مقسوم علیه کثیر الجمله ایست که بحسب x از درجه سوم میباشد و باقیمانده بحسب x از درجه اول است پس فرض کنیم ax^3+bx^2+cx+d خارج قسمت و $ex+f$ باقیمانده مطلوب باشد باید:

$$x^5-1\equiv(x^2+2x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)+ex+f$$

یا

$$x^5-1\equiv ax^5+x^4(2a+b)+x^3(2b+c-a)+x^2(2c+d-b)+x(2d+e-c)+f-d$$

برای استقرار این اتحاد باید $a=1$ و $2a+b=0$ و $2b+c-a=0$ و $2c+d-b=0$ و $2d+e-c=0$ و $f-d=-1$ باشد - خلاصه



چون $2a+b=2+b=0$ است پس $b=-2$ و چون $2b+c-a=-4+c-1$

$=c-5=0$ است بنابراین $c=5$ آنوقت تساوی چهارم چنین میشود

$10+d+2=0$ و $12+d=0$ پس $d=-12$ بعد تساوی پنجم باینصورت

بیرون میآید : $-24+e-5=e-29=0$ پس $e=29$ و بالاخره

از تساوی ششم نتیجه میشود $f-29=-1$ یا پس از جمع ۲۹ با طرفین $f=28$

بقسمی که خارج قسمت مطلوب $x^3-2x^2+5x-12$ و باقیمانده $29x+28$ است

مسئله - a و b و c و d و m و n را بقسمی تعیین کنید که :

$$x^5+x^4-x^3-12x+5\equiv(x^2+2x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)+mx+n$$

(جواب : $m=n=0$ و $a=1, b=-1, c=2$ و $d=-5$)

مسئله A و B و C را بقسمی تعیین کنید که :

$$12-x\equiv12A-x(7A+4B+3C)+x^2(A+B+C)$$

جواب $A=1$ و $B=-3$ و $C=2$

مسئله - a و b و c و d را بقسمی معلوم کنید که اتحاد ذیل متقرر شود

$$6x^3+27x^2+43x+14\equiv a(x+2)^3+b(x-2)(x+2)^2$$

$$+c(x+2)(x-2)+d(x-2)$$



جواب $a=4$ و $b=2$ و $c=-1$ و $d=3$

مسئله - فرض کنیم کثیر الجمله ax^2+bx+c به $x-\alpha$ و $x-\beta$ قابل قسمت باشد

اولاً عامل K را تقسیمی تعیین کنید که $ax^2+bx+c \equiv K(x-\alpha)(x-\beta)$

ثانیاً $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را بحسب a و b و c حساب کنید

حل - چون طرف ثانی اتحاد فوق را بحسب قوای نزولی x مرتب کنیم

نتیجه میشود $ax^2+bx+c \equiv Kx^2-Kx(\alpha+\beta)+K\alpha\beta$

برای استقرار این اتحاد باید $K=a$ و $-K(\alpha+\beta)=b$ و $K\alpha\beta=c$ باشد

با ملاحظه $K=a$ از دو رابطه دیگر نتیجه میشود $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

مسئله - فرض کنیم کثیر الجمله $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ به $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ و $(x-\gamma)$ و $(x-\delta)$ قابل قسمت باشد اولاً K را تقسیمی تعیین کنید که

کثیر الجمله مفروض $\equiv K(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

ثانیاً مجموع α و β و γ و δ را حساب کنید

ثالثاً حاصل ضرب آنها را بدست آورید رابعاً مجموع حاصل ضربهای دو بدوی آنها را تعیین کنید ($\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$) خامساً مجموع حاصل ضربهای سه بسه آنها را معلوم نمائید ($\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\beta\gamma$)



جواب $a=K$ و مجموع $=-\frac{b}{a}$ ، مجموع حاصل ضربهای دو بدو $=\frac{c}{a}$ و مجموع حاصل ضربهای سه بسه $=-\frac{d}{a}$ ، حاصلضرب $=\frac{e}{a}$

مسئله - a و b را قسمی تعیین کنید که an^2+bn مجموع اعداد طبیعی از یک تا n باشد.

طریق حل - باید $an^2+bn=1+2+3+\dots\dots+n$ و نیز $a(n+1)^2+b(n+1)=1+2+\dots+n+(n+1)$ حال اگر طرفین تساوی اول را از طرفین تساوی دوم نقصان کنیم حاصل میشود $2an+(a+b)\equiv n+1$ اتمام بر متعلم است (جواب $a=\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$)

مسئله a و b و c را قسمی تعیین کنید که an^3+bn^2+cn مجموع مجذورات n عدد طبیعی باشد.

بسهولت معلوم میشود که: $a=\frac{1}{3}$ و $b=\frac{1}{2}$ و $c=\frac{1}{6}$ پس:

$$1^2+2^2+\dots\dots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

وچون ملاحظه کنیم که $2n^2+3n+1\equiv(2n+1)(n+1)$ نتیجه میشود:

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



مثلاً اگر $n=5$ باشد نتیجه میشود:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\frac{5\times 6\times 11}{6}=55$$

مسئله ـ فرض کنیم رشته اعداد ذیل را :

$$a\ ,\ b=a+r\ ,\ c=a+2r\ ,\ d=a+3r\ ......$$

چنانکه دیده میشود هر جمله این رشته مساویست با جمله اول بعلاوه حاصلضرب
مرتبه جمله ماقبل آن در عدد r پس اگر جمله n ام این رشته را به l بنامیم؛
$l=a+(n-1)r$ حال میخواهیم اعداد x و y را تقسیمی تعیین کنیم که :

$$a+b+c+......+l=xn^2+yn$$

فوراً معلوم میشود که : $x=\frac{r}{2}$ و $y=\frac{2a-r}{2}$ بنابراین :

$$a+b+c+...+l=\frac{rn^2+2an-rn}{2}=\frac{n(2a+rn-r)}{2}$$

$$=\frac{n(a+l)}{2}$$

مسئله ـ حساب کنید مجموع ۵۰ جمله این رشته را : ۷ ، ۹ ، ۱۱ ، ......

حل ـ در این رشته $a=7$ و $r=2$ و $n=50$ پس

$$7+9+.........=\frac{50(2\times 7+2\times 50-2)}{2}=2800$$

۳۹ ـ تعریف ـ تصاعد عددی رشته ایست از اعداد تقسیمی که هر جمله
آن مساوی جمله ماقبلش باشد بعلاوه مقدار ثابتی که بقدر نسبت موسوم است

مثلاً رشته مسئله اول صفحه قبل تصاعد عددی است . عدد a را جمله اول تصاعد عددی خوانند

فرض کنیم r قدر نسبت و n عده جمل و l جمله آخر و s_1 مجموع n جمله اول تصاعد عددی باشد . دستورات اصلی تصاعد عددی از اینقرارند :

$$l = a + (n-1)r \qquad s_1 = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n(2a+rn-r)}{2}$$

مسئله - حساب کنید $S = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \ldots\ldots + n(n+1)$ را

طریق حل - باید ملاحظه کرد $S = (1+2+3+4+\ldots+n) + (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$

جواب $S = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

مسئله - ثابت کنید که :

$$2+4+6+8+10+\ldots\ldots\ldots+2n = n(n+1)$$

مسئله - مطلوبست مجموع ۷ جمله رشته $2x+3y,\ 3x+2y,\ 4x+y \ldots\ldots$

(جواب $35x$)

۴۰ - (مقادیر موهومی)



سابقاً گفتیم که مقادیر منفی ریشه زوج ندارند پس اگر a منفی باشد برای

$\sqrt{a}$ مقداری موجود نیست و نیز نمیتوان مقداری برای $\sqrt{-8}$

و $\sqrt{-5}$ وغیره بدست آورد. چنین مقادیر را (موهومی) خوانند

سابقاً گفتیم که: $\sqrt{xy}=\sqrt{x}.\sqrt{y}$ یا $\sqrt{x}.\sqrt{y}=\sqrt{xy}$ بقسمی که:

$\sqrt{-a^2}=a\sqrt{-1}$ ، $\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$ ، $\sqrt{-5}=\sqrt{5}\sqrt{-1}$ و .....

بطور کلی اگر $\sqrt{-1}$ را به i نمایش نمایم میتوان نوشت

$$\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$$

مسئله تحقیق کنید که

$\sqrt{-16}=4i$ ، $\sqrt{-121}=11i$ ، $\sqrt{-a^{2m}}=a^{m}.i$

$i^2=-1$ ، $i^3=-i$ ، $i^4=1$ ، $i^{27}=-i$

$$(i^{n}=i^{n-4m})$$

$i^{4m}=1$ ، $i^{1002}=-1$ ، $5\sqrt{-1}-5-\sqrt{-25}=-5$.

(قرار داد)

۱- عبارت $xy+yz+zx$ مجموع حاصل ضربهای دوبدوی سه مقدار x و y و z است بجمیع اقسام ممکنه.

۲- عبارت $a^2+b^2+c^2$ مجموع مجذورات سه مقدار a و b و c است

عبارت اوّل مجموع یک عدّه جملی است شبیه به xy و عدّهٔ آنها مربوط به عدّهٔ مقادیری است که حاصل ضرب دو بدوی آنها حساب میشود . عبارت دوّم نیز مجموع یک عدّه جملی است شبیه به a^2 و عدّهٔ آنها مربوط است بعدّه عواملی که مجموع مجذورات شان مطلوب است پس میتوان گفت :

اوّلا $xy+yz+zx$ مجموع جملی ست شبیه به xy و بعبارهٔ اخری مجموع اقسام xy است ثانیاً $a^2+b^2+c^2$ مجموع جملی ست شبیه به a^2 و بعبارهٔ اخری مجموع اقسام a^2 است اگر بجای لفظ مجموع اقسام حرف $\sum$ (سیگما) را قرار دهیم میتوان نوشت :

$$xy+xz+zy=\sum xy \qquad a^2+b^2+c^2=\sum a^2$$

و نیز :

$$a+b+c+d+\dots\dots\dots+l=\sum a$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\dots\dots+\sqrt{v}=\sum\sqrt{x}$$

$$a^2b+a^2c+c^2a+c^2b+b^2a+b^2c=\sum a^2b$$

«حاصل ضرب مجذور هر یک از سه مقدار a و b و c در هر یک از دو مقدار دیگر »



تبصره ۵ - متعلمین باید همیشه اتحادهای ذیل را در خاطر داشته باشند

(۱) $(a \pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b$

(۲) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

(۳) $(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$

(۴) $(a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(۵) $(a \pm b)^3 \equiv a^3 \pm b^3 + 3ab(a \pm b)$

(۶) $(a+b+c+\cdots+l)^2 \equiv \sum a^2 + 2\sum ab$

(۷) $(a+b+c)^3 \equiv \sum a^3 + 3\sum a^2b + 6abc$

(۸) $(a+b+c)^3 \equiv \sum a^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

(۹) $x^n - a^n \equiv (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$



(سومین مسئله تفریحی)

مقدمه — عددی تعیین کنید که رقم آحادش x و رقم عشراتش y و رقم مآتش z و رقم الوفش t .... و غیره باشد

برای تعیین عدد مطلوب کافی است عده واحدهائی را که شامل است تعیین کنیم پس اگر N عدد مطلوب باشد: $N=\dots 1000t+100z+10y+x$

مثلاً عدد پنج رقمی که رقم آحادش ۲ و چهار رقم دیگرش بترتیب ۷ و ۸ و ۵ و ۶ باشد عبارتست از $6\times10000+5\times1000+8\times100+7\times10+2$

بعد از این مقدمه گوئیم شخصی امر کنید چند عدد کوچکتر از ده خیال کند اولی را در دو ضرب نموده بحاصل ۵ واحد بیفزاید مجموع را در ۵ ضرب کند و بحاصل ضرب ده واحد اضافه نماید و نتیجه را با عدد دوم جمع کنید و مجموع را در ده ضرب نموده بحاصل ضرب عدد چهارم را بیفزاید و قس علیهذا الی آخر حاصل را سوال کنید و از آن عددی را که عده ارقامش مساوی عده اعدادی که خیال کرده است و دو رقم اول سمت راستش ۳۵ و بقیه ارقامش صفر است نقصان کند ارقام تفاضل بترتیب اعدادی هستند که خیال کرده



مثال ـ فرض کنیم شخصی اعداد ۲ و ۶ و ۳ و ۱ و ۵ را خیال

باشد مقداری را که سوآل میکنید این است

$$\left[\left\{\left[(2\times 2+5)5+10+6\right].10+3\right\}.10+1\right].10+5=61315$$

که چون از آن ۳۵۰۰۰ را کم کنیم عدد ۲۶۳۱۵ حاصل میگردد و

چنانکه ملاحظه میشود ارقام اینعدد بترتیب از سمت چپ اعدادی هستند

که خیال کرده است

برهان ـ فرض میکنیم شخصی n عدد a، b، c، .... l را خیال کند

واضحست که:

$$(2a+5)5+10+b=10a+b+35$$

$$(10a+b+35).10+c=100a+10b+c+350$$

$$(100a+10b+c+35).10+d=1000a+100b+10c+d+3500$$

- - - - - - - - - - - - - - -

چنانکه دیده میشود عده صفرهائیکه جلوی ۳۵ است یک واحد از عده

اعداد مفروضه کمتر است بقسمی که نتیجه که بالاخره مقداری را که سوآل میکنید عبارتست از

$$\overbrace{1000\ldots0}^{n-1}a+\ldots\ldots+10k+l+35\overbrace{000\ldots\ldots0}^{n-2}$$

حال اگر $35\overbrace{0\ldots\ldots0}^{n-2}$ را از این حاصل کم کنیم عدد n رقمی میماند که ارقامش

اعدادی هستند که خیال کرده است

مسئله ذیل که بسیار جالب توجه است یکی از حالات خاص مسئله فوق میباشد

مسئله - یکی از چند نفر حلقه را بیکی از انگشتان خود کرده اند میخواهیم معلوم کنیم حلقه در کدام یک از بندهای کدام انگشت کدام دست کدام یک از آنها است.

برای حل اشخاص را بترتیب نشانده و برای هریک رتبه معین کنید (اولی و دومی .... وغیره) و بهمینطریق برای هریک از دستها مرتبه معین کنید مثلا مرتبه دست راست را (۱) و مرتبه دست چپ را ۲ قرار دهید و بهمین قسم برای انگشتان و بندها رتبه تعیین نمائید بدیهی است که حل مسئله بتعیین چهار عدد راجع میشود

مثلا فرض کنیم حلقه مفروض در بند دوم انگشت سوم ( ) دست راست (۱) شخص هفتم باشد بگوئید عده بندها را دو برابر نموده بحاصل ۵ واحد اضافه کنید ومجموع را در ۵ ضرب نموده حاصل ضرب را با ۱۰ جمع کرده و رتبه انگشتان (۳) را بآن بیفزائید مجدداً مجموع را در ده ضرب کنند و بحاصل ضرب مرتبه دست (۱) را اضافه نمائید و

۵۸۱۷

بالاخره این حاصل را در ده ضرب کرده مرتبهٔ شخص را با آن جمع کنند نتیجه

میشود چون از آن ۳۵۰۰ کم کنید میشود ۲۳۱۷ و از اینرو معلوم است که

حلقه : در بند دوم انگشت سوم دست اول (راست) شخص متهم است!



فصل چهارم

تجزیهٔ عبارات صحیح و منطق بعوامل

۴۲ - در نمره ۲۴ عامل را تعریف کردیم . اکنون گوئیم عاملی را اوّل خوانند وقتی بجز خود و واحد بر عامل دیگری قابل قسمت نباشد در صورت عکس عامل را مرکّب خوانند

هر عامل مرکّب را میتوان بحاصل ضرب عوامل اوّل تجزیه کرد مثلاً عوامل اوّل a^3b^2c عبارتند از ۲ و ۳ و a و a و a و b و b و c

و عوامل اوّل x^2-y^2 عبارتند از $x+y$ و $x-y$

«مقصود از تجزیه یکعبارت بعوامل تعیین عواملی است که چون در هم ضرب شوند آن عبارت حاصل گردد .» وقتی مقصود تجزیهٔ عبارتی بعوامل باشد باید ابتدا عمل عامل مشترک گرفتن را مجری داشت . ذیلاً طرق تجزیهٔ یکعبارت بعوامل را ذکر میکنیم :

۴۳ - تجزیهٔ عباراتی که بصورت تفاضل دو مجذور باشند

در اینحال تجزیه بواسطه استعمال اتحاد $(x+y)(x-y) \equiv x^2-y^2$ (۱)

صورت میگیرد .

مسئله - میخواهیم دو جمله $100-900a^{10}$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - واضحست که $100-900a^{10} \equiv 100[(1)^2-(3a^5)^2]$ حال باید عبارت $(1)^2-(3a^5)^2$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم . خلاصه اینعبارت تفاضل دو مجذور است پس $(1)^2-(3a^5)^2=(1+3a^5)(1-3a^5)$

بنابراین :

$$100-900a^{10} \equiv 100(1+3a^5)(1-3a^5)$$

مسئله - عبارت $(x+y)^2-(x-2y)^2$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - اگر عبارت فوق را که تفاضل دو مجذور است به A بنمائیم :

$$A=(x+y+x-2y)(x+y-x+2y)=3y(2x-3y$$

مسئله - چهار عامل تعیین کنید که حاصل ضربشان x^8-y^8 باشد

حل - برای حل مسئله کافی است که x^8-y^8 را بحاصل ضرب چهار عامل تجزیه کنیم برای اینکار دو جمله x^8-y^8 را بترتیب باین صور مینویسیم

$$x^8-y^8=(x^4+y^4)(x^4-y^4)=$$

$$(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

مسئله - صحت اتحادهای ذیل را بواسطهٔ تجزیه طرف اول آنها بحاصل ضرب عوامل تحقیق کنید.

$8^2 - 5^2 = 13 \times 3 \; , \; a^2 - 81 = (a+9)(a-9)$

$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1) \; , \; x^5 - x^3 = x^3(x+1)(x-1)$

$a^8 - b^6 = (a^4 - b^3)(a^4 + b^3) \; , \; 100 - 1 = (10+1)(10-1)$

$9.991 = (100+3)(100-3) \; , \; d^2 - 1 = (d+1)(d-1)$

$(a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c) \; , \; 36 - 1 = 5 \times 7 \; , \; 8 = 2 \times 4$

$48 = 8 \times 6 \; , \; 9a^2b^2 - c^2 = (3ab+c)(3ab-c) \; , \; \frac{1}{a^2} - 1 = (\frac{1}{a}+1)(\frac{1}{a} -$

$(a+b)^2 - 4x^2 = a+b+2x)(a+b-2x)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \; , \; \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})(\frac{a}{b} - \frac{b}{a})$

$(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 \; ; \; (2a-3b)^2 - 4(a+b)^2 = 5b(b-4a)$

$(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 = 4a(b+c)$

$a^2x^4 - b^2x^2(x^2-a^2)^2 = x^2(ax - a^2b + bx^2)(ax + a^2b - bx^2)$

$(a^2+b^2)^4 - (a^2-b^2)^4 = 8a^2b^2(a^2+b^2)$

$x^{16} - y^{16} = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$

$$x^{12}-y^{12}=(x^3-y^3)(x^3+y^3)(x^6+y^6)$$

$$a^{8m}-b^{8m}=(a^{4m}+b^{4m})(a^{2m}+b^{2m})(a^m+b^m)(a^m-b^m)$$

۲۴- تجزیه عباراتی که بصورت مجموع یا تفاضل دو مکعب باشند

باید دو اتحاد ذیل را استعمال کرد

$$(2)\qquad x^3-y^3\equiv(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$(3)\qquad x^3+y^3\equiv(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

مسئله - دو جمله $1000y^3-1$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - $1000y^3-1=(10y)^3-(1)^3=(10y-1)(100y^2+10y+1)$

مسئله - پنج عامل تعیین کنید که حاصل ضربشان $x^6y^6z^6-8x^3y^3z^3$ باشد

حل - باید $x^6y^6z^6-8x^3y^3z^3$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کرد وصورت عمل از انقسام راست:

$$x^6y^6z^6-8x^3y^3z^3=x^3y^3z^3(x^3y^3z^3-8)$$

$$=x^3y^3z^3(xyz-2)(x^2y^2z^2+2xyz+2)$$

مسئله - دو جمله a^7+27ab^6 را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - $a^7+27ab^6=a\left[(a^2)^3+(3b^2)^3\right]=$

$$a(a^2+3b^2)(a^4-3a^2b^2+9b^4)$$

مسئله - عدد ۱۰۰۰۰۰۱ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - $1000001 = 1000000 + 1 = (100)^3 + 1^3$

$$= (100+1)(100^2-100+1) = 101 \times 9901$$

مسئله - تحقیق کنید که:

$$x^3-1 \equiv (x-1)(x^2+x+1) \;,\; 1000-x^6 \equiv (10-x^2)(100+10x^2+x^4)$$

$$8-y^3 \equiv (2-y)(4+y^2+2y) \;,\; x^3-y^{3x} \equiv (x-y^x)(x^2+y^{2x}+xy^x)$$

$$a^6-1 \equiv (a+1)(a-1)(a^4+a^2+1) \;,\; 1-x^6 \equiv (1+x)(1-x)(1+x^2+x^4)$$

$$8x^9+729 \equiv (2x^3+9)(4x^6-18x^3+81)$$

$$64a^3+1 \equiv (4a+1)(16a^2-4a+1)$$

$$(a+b)^3-1 \equiv (a+b-1)(a^2+b^2+2ab+a+b+1)$$

$$1001 \equiv 11 \times 91 \;,\; \frac{a^3}{b^6}-\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b^2}-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a^2}{b^4}+\frac{a^2}{b^3}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$x^{25}-xy^{24} = x(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \times$$

$$(x^4-x^2y^2+y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)$$

$$3^{6n}-2^{6n} \equiv (3^n+2^n)(3^{2n}-6^n+2^{2n})(3^n-2^n)(3^{2n}+6^n+2^{2n})$$



۲۵ـ تجزیه مجذور دو جمله و یا تجزیه سه جمله هائیکه مجذور کامل باشند از ملاحظه اتحاد $(x \pm y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (۴) نتایج ذیل بدست میآید:

۱ـ برای اینکه سه جمله مفروض مجذور کامل باشد باید وقتی آنرا بحسب قوای صعودی یا نزولی یکی از حروف مرتب میکنیم جمله دوم آن مضاعف حاصل ضرب جذر دو جملهٔ اول و آخر باشد

۲ـ وقتی سه جملهٔ مفروض مجذور کامل باشد جذرش مساویست با مجموع یا تفاضل جذر دو جملهٔ اول و آخر برحسب اینکه جمله دوم مثبت یا منفی باشد ـ (بفرض اینکه قبلاً جمله مفروض بحسب قوای صعودی یا نزولی یکی از حروف مرتب شده باشد)

۳ـ فرض کنیم x^2 و y^2 دو جملهٔ طرفین مجذور معینی باشند اگر مضاعف جذر حاصلضرب این دو مقدار یعنی $2xy$ را به x^2+y^2 بیفزائیم یا نقصان کنیم حاصل مجذور کامل میشود و جذرش $x \pm y$ میباشد

۴ـ فرض کنیم x^2 و $\pm 2xy$ دو جملهٔ اول مجذور معینی باشند جمله اول آن x است و جملهٔ دومش خارج قسمت $\pm 2xy$ بر مضاعف جمله اول یعنی $\pm y = \frac{\pm 2xy}{2x}$ پس مجذور مطلوب $x \pm y$ میباشد و جمله که باید

به $x^2 \pm 2xy$ افزوده تا حاصل مجذور کامل گردد y^2 است

مسئله – از بین سه کثیرالجمله x^2-2x-y^2 و $a^2+2ab+b^2$ و

$9x^2-6xy+y^2$ آنهائیرا که مجذور کاملند معین نموده جذرشان را

بدست آورید

حل – از بین سه کثیرالجمله فوق فقط دومی و سومی شرط (۱) صدق میکنند

و بنابراین مجذور کاملند – جذر دومی مجموع جذر a^2 و b^2 یعنی $a+b$ است

و جذر سومی تفاضل جذر $9x^2$ و y^2 یعنی $3x-y$ میباشد.

مسئله – بنابراینکه x^2+ax دو جمله اول مجذور معینی باشد آن معین کدامست؟

چه مقداری به x^2+ax اضافه کنیم تا مجذور آن معین بدست آید؟

حل – جمله اول مطلوب x و جمله دومش $\frac{ax}{2x}=\frac{a}{2}$ است پس

مطلوب $x+\frac{a}{2}$ میباشد ($(x+\frac{a}{2})^2=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$) پس برای اینکه x^2+ax

مجذور کامل شود باید بر آن $\frac{a^2}{4}$ را افزود.

مسئله – از بین کثیرالجمله های ذیل آنهائی را که مجذور کاملند معین نموده جذر

آنها را بدست آورید

کثیرالجمله   جذر



$a^2-2ab+b^2$	$a-b$
$a^2-4a^2b^2+4b$	مجذور کامل نیست
$2xy-x^2-y^2$	مجذور کامل نیست
$20a^2-220a+605$	$\sqrt{5}(2a-11)$
$1-4m+4m^2$	$1-2m$
x^2-3x+4	مجذور کامل نیست
$(a+b)^2-24(a+b)+144$	$a+b-12$
$(a-b)^2-2x(a-b)+x^2$	$a-b-x$
$5+2\sqrt{5}+1$	$\sqrt{5}+1$
$5-2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

مسئله - بنا بر آنکه عبارات ذیل دو جمله طرفین مجذور بینمی باشند اوّلاً آن بینم را تعیین کنید ثانیاً معلوم کنید بهر یک از این عبارات چه مقداری بیفزائیم تا مجذور آن بینم بدست آید

عبارت	بینم	مقداری که باید افزود
a^2+b^2	$a\pm b$	$+2ab$ یا $-2ab$

$9x^2+y^2$	$3x \pm y$	$+6xy$ یا $-6xy$
$3a^2+2b^2$	$\sqrt{3}a \pm \sqrt{2}b$	$+2ab\sqrt{6}$ " $-2ab\sqrt{6}$
$4x^2+9y^2z^2$	$2x \pm 3yz$	$\pm 12xyz$
x^2+9	$x \pm 3$	$\pm 6x$

مسئله - بنابر آنکه عبارات ذیل دو جمله اول مجذور بینمی باشد اولاً آن بینم را معین کنید و ثانیاً معلوم نمائید بهریک از این عبارات چه مقداری بیفزائیم تا مجذور آن بینم بدست آید

عبارت	بینم	مقداریکه باید افزود
x^2+2ax	$x+a$	a^2
x^2-2ax	$x-a$	a^2
$4x^2+4xy$	$2x+y$	y^2
x^2-px	$x-\frac{p}{2}$	$\frac{p^2}{4}$
$x^2+\frac{b}{a}x$	$x+\frac{b}{2a}$	$\frac{b^2}{4a^2}$

۴۶ - تجزیه عباراتی که بصورت $y=ax^2+bx+c$ باشند -

واضحست که $y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$ یا پس از مجذور کامل کردن $x^2+\frac{b}{a}x$

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}a+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

اکنون بحسب آنکه b^2-4ac مثبت یا منفی یا صفر باشد سه حالت تشخیص میدهیم:

اولاً $b^2-4ac>0$ است دراینصورت :

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

یا :

$$y=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

ثانیاً اگر $b^2-4ac=0$ باشد نتیجه میشود $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

ثالثاً اگر b^2-4ac منفی باشد تجزیه بعوامل تحقیقی ممکن نیست

اگر سه جمله مفروض بصورت x^2+px+q باشد نتیجه میشود :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

حال اگر $p^2-4q>0$ باشد حاصل میشود :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

واگر $p^2-4q=0$ باشد نتیجه میشود $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ واگر $p^2-4q<0$ باشد تجزیه بعوامل حقیقی ممکن نیست .

مسئله — درصورت امکان سه جمله $y=9x^2-26x-3$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید



حل — دراینجا $a=9$ و $b=-26$ و $c=-3$ است

وچون $b^2-4ac=784>0$ است تجزیه ممکن است برای اجرای عمل تجزیه دستور (۶) را استعمال میکنیم نتیجه میشود :

$$y=9\left(x+\frac{-26-\sqrt{784}}{2\times 9}\right)\left(x+\frac{-26+\sqrt{784}}{2\times 9}\right)$$

$$=9(x+3)\left(x+\frac{1}{9}\right)=(x+3)(9x+1)$$

مسئله - سه جمله $y=12-x-x^2$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - واضحست که $y=-x^2-x+12$ و در این سه جمله $a=-1$ و $b=$ $c=12$ میباشد و چون $b^2-4ac=49>0$ است تجزیه ممکنست باینصورت

$$y=-\left(x+\frac{-1-\sqrt{49}}{-2}\right)\left(x+\frac{-1+\sqrt{49}}{-2}\right)$$

یا $y=(x+4)(3-x)$

مسئله - میخواهیم x^2+x+1 را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - این عبارت بصورت x^2+px+q میباشد $(p=q=1)$

وچون $p^2-4q=-3<0$ است تجزیه ممکن نیست

مسئله - سه جمله x^2+2x+1 را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل - $p^2-4q=4-4=0$ است پس $x^2+2x+1=(x+1)^2$



مسئله - تحقیق کنید که :

$$x^2-5x+6\equiv(x-3)(x-2)$$

$$x^2-2x+1\equiv(x-1)^2$$

$$x^2-\frac{5}{2}x+1\equiv(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$6x^2-11x-10\equiv(2x-5)(3x+2)$$

$$15x^2-29x-14\equiv(3x-7)(5x+2)$$

$$12m^2+mn-20n^2\equiv(4m-5n)(3m+4n)$$

$$9x^2-9x-10\equiv(3x+2)(3x-5)$$

$$(3x^2-22x+21)\equiv3\left(x-\frac{11+\sqrt{58}}{3}\right)\left(x-\frac{11-\sqrt{58}}{3}\right)$$

$$x^2+x-1\equiv\frac{1}{4}(2x+1+\sqrt{5})(2x+1-\sqrt{5})$$

$$x^3-5x^2+6x\equiv x(x-3)(x-2)$$

$$x^3-3x^2+2x\equiv x(x-1)(x-2)$$

تجزیه بعوامل حقیقی ممکن نیست

$$\begin{cases} x^2-3x+5 \\ x^2-ax+8a^2 \\ x^2+2x+189 \\ 3x^2-9x+103 \end{cases}$$



$$x^2 - 3x + 5$$ } تجزیه بعوامل حقیقی ممکن نیست

تجزیه کثیر الجمله ها

۴۷- طریق اول — دسته بندی

بواسطه استعمال پرانتز کثیر الجمله را که مقصود تجزیه آنست بدو جمله ها و جمله ها تقسیم میکنیم پس از این تقسیم در صورتیکه دو جمله ها و سه جمله های مفروض را مناسب اختیار کرده باشیم چند حالت ممکن است روی دهد :

۱- بعد از دسته بندی و تجزیه هر دسته بقواعد سابقه در جمع دستجات عامل مشترکی یافت میشود در اینصورت کافی است عمل عامل مشترک گرفتن را مجری سازیم .

مسئله — عبارت $P = ax + by + bx + ay$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل — $P = (ax + ay) + (by + bx) = a(x+y) + b(x+y)$

پس : $P = (x+y)(a+b)$

مسئله — کثیر الجمله $x^2 + xy + xz + yz$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

حل — $(x^2 + xy) + (xz + yz) = x(x+y) + z(x+y)$

$= (x+z)(x+y)$



مسئله ـ عبارت ذیل را بحاصل ضرب عوامل تجزیه نمائید .

$$A=a^2x+abx+ac+aby+b^2y+bc$$

حل ـ $A=(a^2x+abx)+(aby+b^2y)+(ac+bc)$

$$=ax(a+b)+by(a+b)+c(a+b)$$

$$=(a+b)(ax+by+c)$$

مسئله ـ عبارت ذیل را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

$$P=ac(a+c)+ab(a-b)-bc(b+c)$$

حل ـ عبارت فوق را برحسب قوای نزولی یکی از حروف مثلاً a مرتب

میکنیم حاصل میشود : $P=a^2(b+c)-a(b^2-c^2)-bc(b+c)$

$$=(b+c)\left[a^2-a(b-c)-bc\right]$$

$$=(b+c)\left[(a^2-ab)+(ac-bc)\right]$$

$$=(b+c)\left[a(a-b)+c(a-b)\right]$$

$$=(b+c)(a+c)(a-b)$$



مسئله ـ بواسطه تجزیه بعوامل تحقیق کنید که :

$$ax-ay+bx-by=(x-y)(a+b)$$

$$a^2+ab+ac+bc=(a+c)(a+b)$$

$$x^2-ax+bx-ab=(x-a)(x+b)$$

$$ax-bx-ay+by=(x-y)(a-b)$$

$$x^3-5x^2-x+5=(x-5)(x+1)(x-1)$$

$$x^2+xy+ax+ay=(a+x)(x+y)$$

$$2y^3-y^2+4y-2=(y^2+2)(2y-1)$$

$$6x^2-9ax+4bx-6ab=(2x-3a)(3x+2b)$$

$$2a^3+a-6a^2b-3b=(2a^2+1)(a-3b)$$

$$12a^2-4ab-3ax^2+bx^2=(4a-x^2)(3a-b)$$

$$axy-2ay^2-2a^2x+4a^2y+3ayz-6a^2z=$$
$$a(y-2a)(x-2y+3z)$$

$$6a^2x+a^2xy+9a^2bz-3abxz-2ax^2-3a^3y=$$
$$a(3a-x)(2x+3bz-ay)$$

$$x^4+x^2y^2+x^2z^2-x^3y-xyz^2+y^2z^2=$$
$$(x^2+z^2)(x^2+y^2-xy)$$



$$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)\equiv(ax+by)(bx+ay)$$

$$ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)\equiv(ax-by)(bx+ay)$$

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\equiv$$

$$(y-z)(x-y)(x-z)$$

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\equiv$$

$$-(z-y)(y-x)(x-z)(x+y+z)$$

۲ــ بعد از دسته بندی عبارت مفروض بصورت تفاضل دو مجذور بیرون می‌آید

مسئله ــ عبارت $P=2bd-a^2-c^2+b^2+d^2+2ac$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید.

حل ــ $P=(b^2+d^2+2bd)-(a^2+c^2-2ac)$

$$=(b+d)^2-(a-c)^2=(b+d+c+a)(b+d-a-c)$$

مسئله ــ میخواهیم کثیرالجمله $x^2-10x+25-121x^6$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل ــ اگر کثیرالجمله فوق را به F بنامیم :



$$F=(x-5)^2-(11x^3)^2=(x-5+11x^3)(x-5-11x^3)$$

مسئله ـ عبارت ذیل را بحاصل ضرب چهار عامل تجزیه کنید

$$A=(m^2+n^2+p^2-q^2-2mn)^2-4p^2(m-n)^2$$

حل ـ واضحست که :

$$A=\left[m^2+n^2+p^2-q^2-2mn-2p(m-n)\right]\times$$
$$\left[m^2+n^2+p^2-q^2-2mn+2p(m-n)\right]$$
$$=\left[(m-n)^2+p^2+2p(m-n)-q^2\right]\times$$
$$\left[(m-n)^2+p^2-2p(m-n)-q^2\right]$$

خلاصه :

$$(m-n)^2+p^2+2p(m-n)=(m-n+p)^2$$

$$(m-n)^2+p^2-2p(m-n)=(m-n-p)^2$$

پس $A=\left[(m-n+p)^2-q^2\right]\left[(m-n-p)^2-q^2\right]$

$$=(m-n+p+q)(m-n+p-q)(m-n-p-q)(m-n-p+q)$$

مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$a^2-2ax+x^2-4b^2=(a-x+2b)(a-x-2b)$$

$$a^2-6ab+9b^2-16c^2=(a-3b+4c)(a-3b-4c)$$

$$4a^2+4ab+b^2-c^2=(2a+b+c)(2a+b-c)$$

$$9a^2-c^2+4cx-4x^2=(3a+c-2x)(3a-c+2x)$$

$$c^2-x^2-y^2+2xy=(c+x-y)(c-x+y)$$

$$9x^2-y^2-4z^2+4yz=(3x+y-2z)(3x-y+2z)$$

$$a^2-x^2-9y^2+b^2+2ab+6xy=(a+b+x-3y)(a+b-x+3y)$$

$$4a^2-b^2+9x^2-4y^2-12ax+4by=$$

$$(2a-3x+b-2y)(2a-3x-b+2y)$$

$$6c^2d^2+4b^4-9c^4-4a^2b^2-d^4+a^4=$$

$$(a^2-2b^2+3c^2-d^2)(a^2-2b^2-3c^2+d^2)$$

$$36a^{2n+2}-4y^{2n+4}-12x^ny^{n+2}+16b^{2n-2}-$$

$$48a^{n+1}b^{n-1}+9x^{2n}=$$

$$(6a^{n+1}-4b^{n-1}+2y^{n+2}-3x^n)\times$$

$$(6a^{n+1}-4b^{n-1}-2y^{n+2}+3x^n)$$

۳ـ بعد از دسته بندی عبارت مفروض بصورت x^2+px+q یا
ax^2+bx+c بیرون میآید



مسئله - میخواهیم $x^2-6xy+9y^2-7x+21y+12$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - عبارت فوق را به P نمائیم. واضحست که:

$$P=x^2-x(6y+7)+(9y^2+21y+12)$$

این عبارت بصورت x^2+px+q است که در این $p=-(6y+7)$ و $q=9y^2+21y+12$ میباشد

پس: $p^2-4q=(6y+7)^2-4(9y^2+21y+12)=1$

بنابراین $P=\left(x+\frac{-6y-7-1}{2}\right)\left(x+\frac{-6y-7+1}{2}\right)$

$$=(x-3y-4)(x-3y-3)$$

مسئله - میخواهیم عبارت $Q=3x^2-6xy+3y^2-10x+10y+3$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - $Q=3(x^2-2xy+y^2)-10(x-y)+3$

$$=3(x-y)^2-10(x-y)+3$$

اینعبارت بصورت aX^2+bX+c است که در آن

$a=3$ و $b=-10$ و $c=3$ و $X=x-y$ است پس:

$$Q = 3\left(x-y+\frac{-10-\sqrt{64}}{2\times3}\right)\left(x-y+\frac{-10+\sqrt{64}}{2\times3}\right)$$

$$= 3(x-y-3)\left(x-y-\frac{1}{3}\right)$$

$$= (x-y-3)(3x-3y-1)$$

مسئله ـ تحقیق کنید که:

$$4x^2-12xy+9y^2-2x+3y \equiv (2x-3y)(2x-3y-1)$$

$$2x^2-xy-6y^2+16x+3y+30=$$

$$(2x-5a+a^2)(3x-2a^2+3a)$$

$$x^2+xy-2xy^2-2y^2+8y^3-8y^4 \equiv (x+2y-4y^2)(x-y+2y^2)$$

$$6x^2-9ax-a^2x+12a^3-2a^4-15a^2=(2x-5a+a^2)(3x-2a^2+3a)$$

$$12x^2+7xy+27x-10y^2+28y+6=(4x+5y+1)(3x-2y+6)$$

$$9x^2-4y^2-4yz-z^2=(3x+2y+z)(3x-2y-z)$$

$$8x^2-2ax+14a^2x-15a^2+19a^3+6a^4=(4x+5a+3a^2)(2x-3a+2a^2)$$

$$x+7x^2+xy+7xy^2+y^3+y^2+7a^2x+a^2y+a^2=(7x+y+1)(x+y^2+a^2)$$

$$2x^2+5x^2y+2xy^2+3x^2y^2+5xy^3+2y^4=(x+xy+y^2)(2x+3xy+2y^2)$$

$$x^2-2a^3x+a^6-b^6 \equiv (x-a^3-b^3)(x-a^3+b^3)$$



۵۰ - طریق دوم — استعمال قضیه نمره ۳۷

وقتی بخواهیم کثیر الجمله مفروض را در صورت امکان باینطریق تجزیه کنیم باید ابتدا آنرا بر حسب قوای یکی از حروف آن مثلاً x مرتب کنیم و فرض کنیم که کثیر الجمله مفروض باینصورت بیرون میآید :

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots\dots + l$$

بعد عوامل $\frac{l}{a}$ را بترتیب بجای x در $f(x)$ قرار میدهیم اگر بازاء یکی از آنها مثلاً α $f(x)$ صفر شد بنا بقضیه نمره ۳۷ $f(x)$ بر $x-\alpha$ قابل قسمت است و بعبارت اخری $x-\alpha$ یکی از عوامل $f(x)$ میباشد و بهمینطریق سایر عوامل آنرا بدست میآوریم

مثل — میخواهیم $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

عوامل ۶ − عبارتند از ± 1 و ± 2 و ± 3 و ± 6

خلاصه $f(-1) \neq 0$ و $f(+1) = 0$ پس $x-1$ یکی از عوامل $f(x)$ است و

$f(-2) = 0$ پس $x+2$ نیز عامل دیگر آنست $f(2) \neq 0$ و $f(-3) = 0$

پس $x+3$ نیز یکی از عوامل $f(x)$ میباشد و چون $f(x)$ از درجه سوم است

عامل دیگری جز $x-1$ و $x+2$ و $x+3$ ندارد یعنی :

$$f(x)\equiv(x-1)(x+2)(x+3)$$

ممکن بود پس از تعیین عامل $x-1$ ملاحظه کنیم که $f(x)\equiv(x-1)(x^2+5x+6)$

(بچه طریق؟) خلاصه $x^2+5x+6\equiv(x+2)(x+3)$ پس.

$$f(x)\equiv(x-1)(x+2)(x+3)$$

مسئله - میخواهیم $f(x)\equiv4x^5-22x^4+17x^3+83x^2-152x+60$

را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم

حل - عوامل $\frac{60}{4}=15$ عبارتند از $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$ خلاصه $f(\pm1)\neq0$

$f(2)=0$ پس $x-2$ یکی از عوامل $f(x)$ است و پس از تقسیم معلوم میشود که

$$f(x)\equiv(x-2)(4x^4-14x^3-11x^2+61x-30)$$

برای سهولت فرض کنیم $\varphi(x)\equiv4x^4-14x^3-11x^2+61x-30$ باشد

پس باید عوامل $\varphi(x)$ را بدست آورد خلاصه $\varphi(2)=0$ پس $x-2$ عامل

$\varphi(x)$ هم هست وبسهولت معلوم میشود که:

$$\varphi(x)\equiv(x-2)(4x^3-6x^2-23x+15)$$

بقسمی که $f(x)\equiv(x-2)^2(4x^3-6x^2-23x+15)$

اکنون مقدار داخل پرانتز اخیر را به $\psi(x)$ بنمائیم فوراً معلوم میشود که

$\psi(3)=0$ بنابراین $x-3$ عامل $\psi(x)$ است

$\equiv (x-3)(4x^2+6x-5)$ و چون $4x^2+6x-5 \equiv \frac{1}{4}(4x+3-\sqrt{29})(4x+3+\sqrt{29})$ پس :

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{4}(x-3)(4x+3+\sqrt{29})(4x+3-\sqrt{29}).$$

بنابراین $f(x) \equiv \frac{1}{4}(x-2)(x-3)(4x+3+\sqrt{29})(4x+3-\sqrt{29})$

مسئله ـ صحت اتحادهای ذیل را بوسیله تجزیه طرف اول آنها به حاصل ضرب عوامل تحقیق کنید

$$x^2-3x+2 \equiv (x-1)(x-2)$$

$$x^3-2x+1 \equiv (x-1)(x^2+x-1)$$

$$x^3-3x^2+3x-1 \equiv (x-1)^3$$

$$x^3-(\alpha^2+1)x+\alpha \equiv (x-\alpha)(x^2+\alpha x-1)$$

$$x^4-14x^3+45x^2-12x-72 \equiv (x+1)(x-3)(x-6-\sqrt{12}) \times (x-6+\sqrt{12})$$

$$x^3-x(a^2+ab+b^2)+ab(a+b) \equiv (x-a)(x-b)(x+a+b)$$

$$x^3-p^2(p^2+p+1)x-p^4(p+1) \equiv (x+p)(x+p^2)(x^2-p^2-p)$$



$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 \equiv (x+a+b)(x^2 - ax - bx + a^2 + b^2 - ab).$$

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 \equiv (x-1)^3 (x+3).$$

$$x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 32x^2 - 54x - 36 \equiv$$

$$(x+2)(x-3)(x+3)(x^2 + 2x + 2).$$

$$x^7 - 2x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - 1 \equiv$$

$$(x-1)^3 (x+1)^2 (x^2 + x + 1).$$

(چهارمین مسئله تفریحی

غیب گوئی ....!

مقدمه – اولاً فرض کنیم N عدد زوجی باشد اگر n خارج قسمت اینعدد بر ۲ باشد حاصل میشود $N=2n$ یعنی هر عدد زوجی بصورت $2n$ است (مثلاً $4=2\times 2$ و $8=2\times 4$ و $18=2\times 9$ وغیره) بعبارة اخری صورت کلی اعداد زوج $2n$ است.

ثانیاً فرض کنیم عدد زوج $2n$ را واضح است که اگر یک واحد بر آن اضافه کنیم عدد حاصل یعنی $2n+1$ فرد است پس هر عدد فرد بصورت $2n+1$ است (مثلاً $9=2\times 4+1$ و $21=2\times 10+1$ و ...... وغیره) و بعبارت اخری

صورت کلّی اعداد فرد $۲n+۱$ است

بعد از این مقدمه گوئیم شخصی امر کنید عددی پیش خود خیال کند سؤال کنید فرد است یا زوج. اگر زوج بود بگوئید بر سه برابر آن نصف سه برابرش را اضافه کند و حاصل را ۹ به ۹ طرح نماید. عدهٔ ۹ها را که در حاصل محتوی بوده سؤال نموده دو برابر کنید حاصل عددی میشود که خیال کرده بود (مثلاً اگر عدد ۸ را خیال کرده باشد مقداری را که سؤال کرده اید اینست $(۳\times۸+\frac{۳\times۸}{۲}):۹=۴$ واضحست که $۸=۲\times۴$]

اگر عددی که خیال کرده فرد بود بگوئید بر سه برابر آن یکواحد اضافه نموده نصف حاصل را با سه برابر آن عدد جمع کند و از مجموع ۵ واحد بکاهد خارج قسمت تفاضل را بر ۹ سؤال نموده آنرا مضاعف کنید و یکواحد بحاصل بیفزائید عددی که خیال کرده بود حاصل میشود (مثلاً اگر ۱۱ خیال کرده باشد مقداریکه سؤال میکنید عبارتست از $(۳\times۱۱+\frac{۳\times۱۱+۱}{۲}-۵):۹=۵$ واضحست که $۱۱=۲\times۵+۱$)

برهان — میدانیم صورت کلّی اعداد زوج $۲n$ و صورت کلّی اعداد فرد $۲n+۱$ است خلاصه در حالت اول عملیکه بر عدد $۲n$ مجری

شده اند عبارتند از :

$$۲n \times ۳ = ۶n \quad ، \quad ۶n + \frac{۶n}{۲} = ۶n + ۳n = ۹n$$

$$۹n : ۹ = n \quad ، \quad n \times ۲ = ۲n$$

چنانکه دیده میشود چون اعمال مذکوره بجا آوریم عدد مطلوب حاصل میشود

در حالت دوم اعمالیکه بر عدد $۲n + ۱$ جاری شده اند چنین اند :

$$۳(۲n+۱) = ۶n+۳ \quad و \quad \frac{۶n+۳+۱}{۲} = ۳n + ۲$$

$$(۶n+۳) + (۳n+۲) = ۹n+۵ \quad و \quad ۹n+۵-۵ = ۹n$$

$$۹n : ۹ = n \quad و \quad ۲ \times n + ۱ = ۲n+۱$$

واین نیز عدد مطلوب میباشد



فصل پنجم

تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک (بمم) و کوچکترین مضرب مشترک (کمم) عبارات جبری

- مسائل مختلف

در تعیین بمم و کمم عبارات جبری چند حالت تشخیص میدهیم ؛

۵۱- **حالت اول** - عبارات مفروضه را میتوان بحاصل ضرب عوامل تجزیه کرد

در این حال ؛

اولاً برای بدست آوردن بمم آنها عوامل مشترک را با نماینده کوچکتر اختیار نموده درهم ضرب میکنیم ثانیاً برای تعیین کمم آنها عوامل مشترک را با نماینده بزرگتر اختیار نموده درهم ضرب نمائیم

مسئله - مطلوبست بمم و کمم $-3a^2bcx$ و $7a^3cb^2x^2$ و $5c^4x$

حل - مطابق قاعده فوق ؛

$$\text{کمم} = \pm 3\times 5\times 7\times a^3\times b^2\times c^4\times x^2 \qquad \text{بمم} = \pm cx$$

مسئله - بمم و کمم $x^5 - xy^4$ و $x^3+x^2y+xy+y^2$ را تعیین کنید

حل - واضحست که :

$$x^5-xy^2=x(x^2+y)(x^2-y)$$

$$x^3+x^2y+xy+y^2=(x+y)(x^2+y)$$

پس : بمم $=x^2+y$

کمم $=x(x^2+y)(x^2-y)(x+y)$

۵۲ - حالت دوّم - اقلاً یکی از عبارات را میتوان بحاصل ضرب عوامل بتجزیه کرد و در اینصورت کافی است تحقیق کنیم که کدام یک از عوامل آن عامل سایر عبارات هستند. باینطریق بمم آنها بدست میآید. برای تعیین کمم طریقی را که در حساب معمول است استعمال میکنند

مسئله - بمم و کمم دو کثیرالجمله $\varphi(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$ و $f(x)=x^2-3x+2$ را بدست آورید

حلّ - $f(x)=(x-1)(x-2)$ خلاصه $\varphi(1)=0$ و $\varphi(2)\neq 0$

پس $x-1$ بمم دو کثیرالجمله مفروض است و کمم اینها این است

$$\frac{f(x)}{x-1}\times\varphi(x)=(x-2)(x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1)$$

۵۳ - حالت سوم - وقتی تجزیه هیچیک از عبارات بسهولت ممکن نباشد طریق نردبانی استعمال میشود مثلاً فرض کنیم مقصود تعیین بمم و کمم



$f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 53x - 39$ و $\varphi(x) = 4x^3 - 3x^2 - 24x - 9$ باصورت عمل اینقرار است

x	$4x^3 - 3x^2 - 24x - 9$	$8x^3 - 2x^2 - 53x - 39$	۲
	$4x^3 - 5x^2 - 21x$	$8x^3 - 6x^2 - 48x$	
$2x$	$2x^2 - 3x - 9$	$4x^2 - 5x - 21$	۲
	$2x^2 - 6x$	$4x^2 - 6x - 18$	
۳	$3x - 9$	$x - 3$	
	$3x - 9$		

توضیح - کثیر الجمله $f(x)$ را به $\varphi(x)$ تقسیم کردیم خارج قسمت ۲ و باقیمانده $4x^2 - 5x - 21$ شد مقسوم علیه سابق یعنی $\varphi(x)$ را باین باقی مانده تقسیم کردیم خارج قسمت x و باقیمانده $2x^2 - 3x - 9$ گردیده عمل را بهمین طریق امتداد دادیم آخرین مقسوم علیه یعنی $x - 3$ بمم دو کثیر الجمله است برای تعیین کمم آنها یکی از دو کثیر الجمله را بر $x - 3$ تقسیم نموده خارج قسمت را در دیگری ضرب بکنیم

مسئله - مطلوبست بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک عبارات ذیل

عبارت	بمم	کمم
$x^2y^3 + x^3y$ و $x^2 - y^2$	$x + y$	$x^2y^2(x^2 - y^2)$
$x^2 - y^2$ و $x^3 - y^3$	$x - y$	$(x + y)(x^3 - y^3)$
$3a^2b + 3ab^2$ و $a + b$	$a + b$	$3ab(a + b)$

a^2-b^2 و a^3-b^3 a^2-b^2 a^4-b^4

a^2+ab+b^2 و a^3-b^3 a^2+ab+b^2 a^3-b^3

مسئله - ب‌م‌م و ک‌م‌م x^2-5x+6 و x^2-6x+9 را بدست آورید

جواب: ب‌م‌م $x-3$ و ک‌م‌م $(x-3)^2(x-2)$

مسئله - ب‌م‌م و ک‌م‌م کثیرالجمله‌های $2a^3-18ab^2$ و $3a^2+9ab$

و $a^3+6a^2b+9ab^2$ را معلوم کنید

جواب: ب‌م‌م $a(a+3b)$ و ک‌م‌م $6a(a+3b)^2(a-3b)$

مسئله - ک‌م‌م x^2+x+1 و x^2-x-1 را بدست آورید

جواب x^4-x^2-2x-1

مسئله - مطلوبست ب‌م‌م $18a^2x^2$ و $4a^2x^2+12axy+9a^2y$

$+27a^3y$

جواب $a(2x+3y)$

مسئله - مطلوبست ب‌م‌م $3a^2+a-2$ و $4a^3+4a^2-a-1$

(جواب: $a+1$)

مسئله - مطلوبست محاسبه کوچکترین مضرب مشترک $x^3+ax^2+a^2x+a^3$

و $x^4+a^2x^2+a^4$ (جواب x^6-a^6)



مسئله - بزرگترین مقسوم علیه مشترک چهار کثیر الجمله $2x^3+2x^2-24x$

$2x^3-30x^2+45x$ و x^3-2x^2-3x و $3x^3-15x^2+18x$

را معلوم کنید (جواب x^2-3x)

مسئله - ک م $a^2b-b(b-c)^2$ و $a(a-b)^2-ac^2$

و $(a+c)^2\times c-b^2c$ را معلوم کنید

$abc(a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$:

مسئله - ب م دو کثیر الجمله x^2-3x+2 و $2x^3-6x^2+5x-2$

را بطریق نردبانی تعیین کنید (جواب $x-2$)

مسئله ثابت کنید که اگر n عدد زوجی باشد اعداد دو سطر اول زوج و اعداد دو سطر آخر فرد‌اند.

n^2+n^3 , n^2-4 , $n^2+(n+1)(n-1)+1$, $+n+2$

$2n+2$ $n+4$ n^3-n^2 $6n^2-5n$

$2n+1$ $2n+3$ $6n+7$ $(n+1)^2$

$(n+1)^2-4n$ $5n-1$ $7n+5.$



مسئله - ثابت کنید که هر عدد صحیحی یکی از صور $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$

K عددیست صحیح و مثبت

اثبات - واضحست که باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح مانند n بر ۳ یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ است در صورت اول اگر خارج قسمت تقسیم n بر ۳ را فرض کنیم نتیجه میشود ۳K = n و در صورت ثانی اگر خارج قسمت را K فرض کنیم ۱+ ۳ = n و قس علیهذا در حالت آخر

مثال، ۳ × ۲ = ۶ و ۱ + ۶ × ۳ = ۱۹ و ۱-۷+۲۰ = ۲ + ۶K۳ = ۲۰ غیره

مسئله - ثابت کنید که هر عدد یکی از صور ۷K و ۱+ ۷K و ۲+ ۷K

برای هر یک از حالات یکمثال بیاورید

مسئله - ثابت کنید که هر عدد یکی از صور ۲K یا ۱+ ۲K میباشد. مثال

مسئله - هر عدد صحیح بصورت ۵K ۱+ ۵K ۲+ ۵K ۳+ ۵K ۴+ ۵K است

مسئله - ثابت کنید که اگر از مجذور عددی بصورت ۱+ ۳K چهار واحد کم کنیم باقیمانده بر ۳ قابل قسمت است. ۵ مثال بیاورید

مسئله - اگر مجذور عددی بصورت ۱+ ۷K را به ۷ تقسیم کنیم یکواحد باقی میماند.



مسئله - ثابت کنید که $n(n-1)(n-2)$ بر سه قابل قسمت است ۱۰ مثال بیاورید طریق اثبات - عدد n هرچه باشد یکی از عوامل حاصل ضرب فوق بر سه قابل قسمت میباشد

۵۴ - (چند قضیه راجع به اعداد صحیح)

۱ - حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی زوج است

۲ - حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی به ۳ قابل قسمت میباشد

۳ - اگر هر یک از عوامل جمع بعددی قابل قسمت باشد مجموع نیز بر آن عدد قابل قسمت است (برای اثبات این مطلب فرض کنیم مجموع چند عامل ma و mb و mc که هر یک از آنها به m قابل قسمت اند

چون ملاحظه کنیم که: $ma - mb + mc = m(a - b + c)$

حکم قضیه ثابت میشود

۵۵ - (قضایای راجع بقوی و رادیکالها)

۱ - حاصل ضرب دو یا چند قوه که پایه شان مشترک باشد قوه ایست با همان پایه که نمایه اش مجموع نمایندهای عوامل باشد

۲ - حاصل ضرب دو یا چند قوه که نماینده آنها مشترک باشد قوه ایست با



همان نماینده که پایه اش حاصل ضرب پایه ها باشد

۳ ـ برای اینکه حاصل ضرب چند عامل را بقوه برسانیم کافی است هر یک از عوامل را بآن قوه رسانده نتایج را در هم ضرب کنیم

۴ ـ خارج قسمت دو قوه که پایه شان مشترک باشد قوه ایست با همان پایه که نماینده اش فضل نماینده مقسوم بر نماینده مقسوم علیه باشد

۵ ـ برای اینکه قوه را بقوه جدیدی برسانیم کافی است نماینده آنرا در نماینده جدید ضرب کنیم .

۶ ـ حاصل ضرب ریشه m ام دو یا چند مقدار مساویست با ریشه m ام حاصل ضرب آن

۷ ـ خارج قسمت ریشه m ام دو مقدار مساویست با ریشه m ام خارج قسمت آنها

۸ ـ قوه m ام ریشه m ام یکعده مساویست با ریشه m ام قوه m ام آن عده

۹ ـ ریشه m ام ریشه m ام یکعده معادل ریشه m.m ام آنست

۱۰ برای اینکه مقداری را در رادیکالی ضرب کنیم کافی است آنرا بقوه



نماینده رادیکال رسانیده و در مقدار تحت رادیکال ضرب کنیم

۱۱- بالعکس برای خارج کردن مقداری از تحت رادیکال کافی است از آن ریشه مساوی نماینده رادیکال گرفته و آنرا جلوی رادیکال بنویسیم.

ذیلا قوانین راجع بقوی و ریشه را بعبارت جبری مینگاریم و بمتعلمین است که همیشه آنها را در خاطر داشته باشند

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \ (\sqrt[p]{a})^n = \sqrt[p]{a^n}, \ \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}, \ a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}.$$

مسئله - تحقیق کنید که،

$$\frac{(x^m y^n z^p)\sqrt[2mnp]{a^{(m^2)} \cdot b^{(n^2)} \cdot c^{(p)^2}}}{(ax)^{2m} \cdot (by)^{2n} \cdot (cz)^{2p}} = \frac{1}{a^m \cdot b^n \cdot c^p}$$

$$\sqrt[x]{\left\{\left[(e^x)^x\right]^x\right\}^x} = e^{(x^3)}, \ \sqrt[-1]{a^{-2}} : \sqrt[-3]{a^{-\frac{2}{3}}} = a\sqrt[3]{a^2}$$

مسئله - صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید:

$$\left(\sqrt[x]{a^{-\frac{1}{y}}} + \sqrt{\sqrt[z]{a^z b}}\right)^2 \equiv$$

$$\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{y}}} + \sqrt[z]{a^z b} + 2\sqrt{\sqrt[z]{b}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[z]{a^{x-2z}}}}}$$

۵۶- تعریف - دو عبارت $a+\sqrt{b}$ و $a-\sqrt{b}$ را مزدوج خوانند

۵۷- قضیّه - حاصل ضرب دو عبارت مزدوج مقداریست منطق

۵۸- تعریف - فرض کنیم سه مقدار a و N و x را بقسمی که $N=a^x$ باشد. عدد x را لگاریتم عدد N در مبنای a خوانند و آنرا بانیعلامت مینمایند $x=\log_a N$ مثلاً $10^2=100$ پس $\log_{10}100=2$ و چون $2^5=32$ پس $5=\log_2 35$

مسئله - مطلوب است $\log_{10}1000$

حلّ - باید عددی مانند x تعیین کرد بقسمیکه $10^x=1000=10^3$ از این تساوی نتیجه میشود $x=3$ یعنی $\log_{10}1000=3$

مسئله - مطلوبست محاسبه $\log_2 8$ و $\log_4 64$ و $\log_{10}1000000$

و $\log_{10}\sqrt[5]{10}$ و $\log_{27}3$ و $\log_{16}4$ و $\log_3 243$

جواب بترتیب ۳ و ۳ و ۶ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ و ۵

مسئله مهم - ثابت کنید که $\log mn=\log m+\log n$, $\log m^n=n\log m$

$\log\frac{m}{n}=\log m-\log n$ و $\log\sqrt[n]{m}=\frac{1}{n}\log m$

مسئله - بنابرآنکه $\log_{10}2=0{,}30103$ باشد حساب کنید $\log 4$ و $\log 8$



$\log\sqrt{2}$ و $\log 20$ و $\log 40$ و $\log\sqrt{80}$ و $\log 4$ را (مبنای لگاریتم عدد ده است)

(جواب ترتیب ۱/۳۰۱۰۳ ، ۰/۱۵۰۵۱۵ و ۰/۹۰۳۰۹ و ۰/۶۰۲۰۶ و ۱/۶۰۲۰۶ را و ۰/۶۰۵۱۵)

پنجمین مسئله تفریحی

شخصی شیئی را در یکی از دو دست خود گرفته است معلوم کنید آن شیئی در کدام یک از دو دست او میباشد.

حل - بگوئید برای دستی که شیئی در آنست عدد زوجی و برای دست خالی عدد فردی قرار دهد بعد امر کنید عدد دست راست را در عدد زوجی ضرب کند و حاصل ضرب را با عدد دست چپ جمع کند مجموع را سوال کنید. اگر مجموع فرد بود آن شیئی در دست راست است والا در دست چپ است

اثبات این قضیه بسیار سهل است و ما آنرا بعنوان مشق بعهده متعلمین میگذاریم

ششمین مسئله تفریحی

میتوانید عددیرا که فکر کرده ایم بگوئید ؟!



با خواندن مطالب ذیل بسهولت از عهده حل مسئله برمیآئید

بگوئید عددیرا که خیال کرده در هر عددی که میخواهید ضرب کند حاصل را بهر عددی که مایلید تقسیم کند و اینعمل را هر قدر شما میخواهید تکرار کند بعد امر کنید حاصل را به عددی که خیال کرده است قسمت نماید و خارج قسمت را با عددی که فکر کرده جمع نماید و حاصل را بشما بگوید. در ضمن اینکه او مشغول بانجام اوامر شما است تمام اعمالی را که باو میگوئید درباب عدد یکه فکر کرده انجام دهد خودتان نسبت بواحد انجام دهید و وقتی عمل تمام شد حاصل را از مجموعیکه از او سوآل کرده بودید نقصان کنید باقیمانده عددیست که خیال کرده است .

مثلاً فرض کنیم شخصی عدد ۲۴ را خیال کرده باشد بگوئید که آنرا در ۵ ضرب نموده حاصل را به ۱۰ تقسیم کنید و مجدداً حاصل را به ۳ تقسیم نماید و خارج قسمت را بعد دیکه فکر کرده قسمت نماید و خارج قسمت حاصل را به عدد یکه فکر کرده بیفزاید و مجموع را که عدد $\frac{۲۹۵}{۱۲}$ است بشما میگوید ضمناً خودتان اعمال فوق را بواحد انجام دهید حاصل چنین میشود

$\frac{۲}{۱۲} = \frac{۵ \times ۱۴}{۱۰ \times ۳ \times ۴}$ و واضح است که : $۲۴ = \frac{۲}{۱۲} - \frac{۲۹۶}{۱۲}$

اثبات این قضیه نیز بسیار سهل است

فصل ششم – کسور جبری

۵۹- تحویل کسر بساده ترین صورت خود – برای تحویل کسر بساده ترین صورت خود ابتدا صورت و مخرج آنرا بحاصل ضرب عوامل تجزیه نموده بعد عوامل مشترک را از صورت و مخرج حذف میکنیم.

مسئله – کسر $\frac{9a^2b+12ab^2}{9a^3b-15ab^3}$ را غیر ممکن التحویل کنید

حل – $\frac{3ab(3a+4b)}{3ab(3a^2-5b^2)}=\frac{3a+4b}{3a^2-5b^2}$ = کسر مفروض

مسئله – کسر $y=\frac{3x^3-13x^2+23x-21}{15x^3-38x^2-2x+21}$ را مختصر کنید.

حل – فوراً معلوم میشود که:

$$y=\frac{(3x-7)(x^2-2x+3)}{(3x-7)(5x^2-x-3)}=\frac{x^2-2x+3}{5x^2-x-3}$$

مسئله – کسر $A=\frac{(ab+1)^2-(a+b)^2}{(a^2-1)(b^2-1)}$ را بساده ترین صورت خود تحویل کنید

حل

$$A=\frac{(ab+1+a+b)(ab+1-a-b)}{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)}{(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)}=1$$

مسئله – کسر $y=\frac{2x^3-4x^2+5x-33}{2x^3-7x^2+9x-18}$ را غیر ممکن التحویل نمائید

حل – بسهولت معلوم میشود که $(x-3)(2x^2-x+6)$ = مخرج

حال ببینیم کدام یک از عوامل مخرج در صورت موجود است: اگر صورت را به $f(x)$ بنمایم دیده میشود که $f(3)=0$ پس $f(x)$ به $x-3$ قابل قسمت است و پس از تقسیم معلوم میشود $f(x)=(x-3)(2x^2+2x+11)$.

بنابراین: $y=\frac{2x^2+2x+11}{2x^2-x+6}$

مسئله - تحقیق کنید که:

$$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{1}{x+y},\quad \frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y,\quad \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}=\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$$

$$\frac{x^2-2xy}{xy-2y^2}=\frac{x}{y},\quad \frac{4x^2-y^2}{(2x+y)^2}=\frac{2x-y}{2x+y},\quad \frac{x^2y-xy^2}{9x-9y}=\frac{xy}{9}$$

$$\frac{ax}{a^2x^2-ax}=\frac{1}{ax-1},\quad \frac{15a^2b^2c^2}{100(a^3-a^2b)}=\frac{3b^2c^2}{20(a-b)}$$

$$\frac{24a^3c^2x^2}{18a^4x^2-12a^2x^3}=\frac{4ac^2}{3a-2x},\quad \frac{x^8y-x^2y^5z^2}{x^3y^4-y^6z}=\frac{x^2(x^3+y^2z)}{y^3}$$

$$\frac{x^2+7xy+12y^2}{x^2-2xy-15y^2}=\frac{x+4y}{x-5y},\quad \frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-(x-1)^4}=\frac{3x^2+1}{4x(x^2+1)}$$

$$\frac{(a^6-b^6)(a-b)}{(a^3-b^3)(a^4-b^4)}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{-6a^4+60a^3b+66a^2b^2}{-12a^{10}(a^2-121b^2)(a^2-b^2)}=\frac{1}{2a^8(a+11b)(a-b)}$$

$$\frac{(15a^2+10b^3)(15x^2-3xy)}{(18a^2+12b^3)(10xy-2y^2)}=\frac{5x}{4y}$$

$$\frac{ac+ad+bc+bd}{ax+bx+ay+by}=\frac{c+d}{x+y},$$

$$\frac{3x^6y^3+3x^3y^6}{x^6-y^6}=\frac{3x^3y^3}{x^3-y^3}$$

$$\frac{x^3+3x^2-4x}{7x^3-18x^2+6x+5}=\frac{x(x+4)}{7x^2-11x-5}$$

$$\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x^4+x^3+3x^2+2x+2}=\frac{x+1}{x^2+2}$$

$$\frac{(a^8+2a^4x^2+x^4)(a^4-x^2)}{(a^2+x)(a^6-a^4x+a^2x^2-x^3)}=a^4+x^2$$

$$\frac{a^9+b^9}{a^7+a^6b-a^4b^3-a^3b^4+ab^6+b^7}=a^2-ab+b^2$$

۶۰ــ تبصره ــ باید در نظر داشت که:

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{-b}$$

یعنی: اوّلاً اگر علامت هر دو جملهٔ کسر یعنی صورت و مخرج آنرا تغییر دهیم علامت کسر تغییر نمیکند. ثانیاً اگر علامت یکی از دو جملهٔ کسر را تغییر دهیم علامت کسر تغییر میکند.

مسئله ــ کسر $A=\frac{(y-x)(x-t)}{(x-y)(t^2-x^2)}$ را مختصر کنید

حل ــ چون ملاحظه کنیم که $y-x=-(x-y)$ حاصل می شود.

$$A=\frac{[-(x-y)][-(t-x)]}{(x-y)(t+x)(t-x)}=\frac{1}{t+x}$$

مسئله تحقیق کنید که:



$$\frac{a^2+ab-b^2}{b^2-a^2}=-\frac{a+2b}{a+b}\,,\quad \frac{x-y}{y-x}=-1\,,\quad \frac{-a^2}{+a^2b}=-\frac{1}{b}$$

$$-\frac{-x^4+y^4}{y^2+x^2} = x^2-y^2$$

$$-\frac{-(y^4-x^2)}{-[-(x+y^2)]} = y^2-x.$$

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2-b^4-a^2c^2}{a^2b+a^2c-abc-ab^2} = \frac{(a+b)(b-c)}{a}.$$

$$\frac{am-ax+bm-cx+cm-bx}{ap^2+bp^2+ax^2+cp^2+bx^2+cx^2} = \frac{m-x}{p^2+x^2}$$

$$-\frac{-[(x-y)(y-z)(z-x)]}{(y-x)(z-x)[-(x-z)]} = 1$$

$$\frac{a^2+x^2-b^2-2bc+2ax-c^2}{x^2+b^2-c^2+2bx-2ac-a^2} = \frac{x+a-b-c}{x-a+b-c}.$$

$$\frac{(b^2-c^2)a^2+a(2bc^2-2b^2c)-(b^4-c^4)}{a(b+c)+(b^2+c^2)} = (b-c)a-(b^2-c^2).$$

$$-\frac{-[-(x-y)+(y-x)]}{x+[-(y-2x)-x]} = \frac{2(y-x)}{2x-y}.$$

۱۶- **رفع و تجنیس** — قاعده رفع و تجنیس کسور جبری عیناً قواعدی است که در اجرای این دو عمل بر کسور حسابی ذکر شده

مسئله- کسر $\frac{x^3+1}{x^2+1}$ را رفع کنید.

حل- چون صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خارج قسمت x و باقیمانده $1-x$ میشود پس

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

مسئله - در عبارت $a^2+ax+x^2+\frac{2x^3}{a-x}$ عمل تجنیس را بجا آورید

حلّ ـ اگر عبارت فوق را به P نمائیم ،

$$P=\frac{(a^2+ax+x^2)(a-x)+2x^3}{a-x}=\frac{a^3+x^3}{a-x}$$

۳ ـ مسئله ـ صحّت تساویهای ذیل را بواسطهٔ عمل رفع تحقیق کنید .

$$\frac{6a^2+13ab+7b^2}{2a+3b}=3a+2b+\frac{b^2}{2a+3b}$$

$$\frac{x^3+4x^2-3x-7}{x^2+2x-5}=x+2-\frac{2x-3}{x^2+2x-5}$$

$$\frac{4x^3-2x^2+4x-17}{2x-3}=2x^2+2x+5-\frac{2}{2x-3}$$

$$\frac{2x^3+4x^2-3x+3}{x^3+3x^2-4x+3}=2-\frac{2x^2-5x+3}{x^3+3x^2-4x+3}$$

۱۰ ـ مسئله ـ صحّت تساویهای ذیل را بواسطهٔ عمل رفع تحقیق کنید .

$$a+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b}{a}\ ,\quad a-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b}{a}\ ,\quad 1+\frac{2ab+b^2}{a^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2}$$

$$a-1+\frac{1+a^2}{a+1}=\frac{2a^2}{a+1}\ ,\quad a-1+\frac{2}{a-1}=\frac{a^2+1}{a+1}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+a-b=\frac{2a^2}{a+b}\ ,\quad 1+\frac{5}{x+2}=\frac{x+7}{x+2}$$

$$\frac{x+y+z}{x+y}-1=\frac{z}{x+y}\ ,\quad a+b-\frac{a^2}{a-b}=\frac{b^2}{b-a}$$

$$x+2y-\frac{x^2-2xy+4y^2}{x+2y}=\frac{6xy}{x+2y}$$

$$2x-6x^3+18x^5-\frac{54x^7}{1+3x^2}=\frac{2x}{1+3x^2}$$

$$x^2+2x-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^4+2x^3-x^2+3x-1}{x^2}$$

۲۶۲ - جمیع قواعدی که در حساب در باب کسور حسابی ذکر شده در کسور جبری نیز مجری میشود

مسئله - مطلوب است مجموع سه کسر $\frac{2a-c}{5}$ و $\frac{a+c}{8}$ و $\frac{a^2-2c}{20}$

حل - ابتدا سه کسر فوق را بکوچکترین مخرج مشترک تحویل میکنیم و چنانکه میدانیم کوچکترین مخرج مشترک کوچکترین مضرب مشترک مخارج است و آن در اینجا ۴۰ میباشد. برای بدست آوردن صورت جدید هر کسر کوچکترین مخرج مشترک یعنی ۴۰ را بمخرج سابق آن تقسیم نموده خارج قسمت را در آن ضرب میکنیم نتیجه میشود:

صورت جدید کسر اول $=(40:20)(a^2-2c)=2a^2-4c$

صورت جدید کسر دوم $=(40:8)(a+c)=5a+5c$

صورت جدید کسر سوم $=(40:5)(2a-c)=16a-8c$

بقسمیکه سه کسر فوق بسه کسر ذیل تبدیل میشوند: $\frac{2a^2-4c}{40}$ و $\frac{5a+5c}{40}$ و $\frac{16a-8c}{40}$ پس اگر مجموع آنها را به S بنامیم:

$$S=\frac{2a^2-4c+16a-8c+5a+5c}{40}=\frac{2a^2+21a-7c}{40}$$

مسئله - عبارت $\frac{a+b}{15}-\frac{2a+3b}{3}$ را مختصر کنید



حل - اگر تفاضل فوق را به D نمائیم :

$$D = \frac{a+b}{15} - \frac{5(2a+3b)}{15} = \frac{a+b-5(2a+3b)}{15}$$

$$= -\frac{9a+14b}{15}$$

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید :

$$\frac{29a}{90} - \frac{3a-20b}{60} + \frac{3a-10b+5c}{20} - \frac{4a-2b+3c}{12} = M$$

حل - کوچکترین مخرج مشترک ۱۸۰ است و $\frac{29a}{90} = \frac{58a}{180}$ و $\frac{3a-20b}{60}$

$= \frac{9a-60b}{180}$ و $\frac{18a-60b+30c}{180}$ ، $= \frac{4a-2b+3c}{12}$

$$\frac{60a-30b+45c}{180}$$

بنابراین $M = \frac{58a}{180} - \frac{9a-60b}{180} + \frac{18a-60b+30c}{180} - \frac{60a-30b+45c}{180}$ یا :

$$M = \frac{58a - 9a + 60b + 18a - 60b + 30c - 60a + 30b - 45c}{180}$$

اتمام بر متعلم است

مسئله - مطلوبست مجموع $\frac{1}{x^2-3x+2}$ ، $\frac{1}{x^2-4x+3}$ ، $\frac{1}{x^2-5x+6}$

حل - فوراً معلوم میشود که :

کم مخارج : کوچکترین مضرب مشترک $= (x-1)(x-2)(x-3)$

صورت جدید کسر اول $= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = x-3$



صورت جدید کسر دوم $= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = x-2$

صورت جدید کسر سوم $= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = x-1$

پس اگر S مجموع مطلوب باشد

$$S = \frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{(x-1)(x-3)}$$

مسئله ـ عبارت $\frac{1}{x-a} - \frac{3}{x+a} + \frac{2x}{(x+a)^2}$ را مختصر کنید

حل ـ فوراً معلوم میشود که :

$$\text{عبارت مفروض} = \frac{x^2+2ax+a^2-3x^2+3a^2+2x^2-2ax}{(x-a)(x+a)^2}$$

$$= \frac{4a^2}{(x-a)(x+a)^2}$$

۲۲ مسئله ـ تحقیق کنید

$$\frac{a+1}{5} + \frac{b-1}{5} + \frac{3-a+2b}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3b+6}{5}$$

$$\frac{a}{15} + \frac{b}{15} - \frac{c+a}{15} - \frac{a+b+c}{15} = \frac{-2c-a}{15}$$

$$\frac{3a+4b}{9} - \frac{5a-7b}{15} - \frac{6a+11b}{45} = \frac{10b-2a}{15}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}, \quad \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} = \frac{-1}{x^2-7x+11}$$

$$\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}, \quad \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = \frac{2x+7}{x^2+7x+12}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{4x}{1-x^2}, \quad \frac{2x+a}{3a}+\frac{5x-4a}{9a}=\frac{11x-a}{9a}$$

$$\frac{x-2y}{xy}+\frac{3y-a}{ay}=\frac{3x-2a}{ax}, \quad \frac{2x-3a}{x-2a}-\frac{2x-a}{x-a}=\frac{a^2}{x^2-3ax+2a^2}$$

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}+\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2+4ax+x^2}{a^2-x^2}$$

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{2x-1}-\frac{2x-3}{4x^2-1}=\frac{2}{x(1-4x^2)}$$

$$\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{12-x}{x(x^2-7x+12)}$$

$$\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}-\frac{2xy}{2x^2+8xy}=\frac{x}{x-4y}$$

$$\frac{a+3}{a-4}-\frac{a+4}{a-3}-\frac{8}{a^2-16}=\frac{52}{(a^2-16)(a-3)}$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-12x+27}+\frac{5x}{x-9}-\frac{6x}{x-3}=\frac{37x+1}{x^2-12x+27}$$

$$\frac{x-4}{2x-1}-\frac{3x-5}{x+2}+\frac{5x^2+9x+140}{2x^2+3x-2}=\frac{20x+1}{2x^2+3x-2}$$

$$\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}=\frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^3}$$

$$-\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{6}{x-1}+\frac{7}{x-2}+x+4=\frac{x^4+1}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$\frac{4x-7x^2-2x^5}{(1+x^2)^3(5-2x^4)}-\frac{\frac{7}{3}+\frac{2}{3}x}{(1+x^2)^3}-\frac{\frac{4}{9}x-\frac{49}{9}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{238}{27}-\frac{23x}{27}}{1+x^2}-\frac{-775+68x+476x^2-44x^3}{27(5-2x^4)}\equiv 0$$



$$\frac{9}{2(x+1)^2}+\frac{7}{4(x+1)}-\frac{3}{x}+\frac{5}{4(x-1)}=\frac{3-2x+4x^2}{x^4+x^3-x^2-x}$$

مسئله - عبارت $A=\frac{3x}{1-x^2}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$ را مختصر کنید

حل - کوچکترین مخرج دو کسر اخیر x^2-1 است و چون مخرج کسر اول $-(x^2-1)$ میباشد علامت جملتین آنرا تغییر میدهیم نتیجه میشود

$$A=\frac{-3x}{x^2-1}-\frac{2x+2}{x^2-1}-\frac{2x-2}{x^2-1}$$

اتمام بر مستقیم است

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید

$$A=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

حل - چون ملاحظه کنیم که $-(b-c)(a-b)=$ مخرج کسر دوم

$(a-c)(b-c)=$ مخرج کسر سوم نتیجه می‌شود:

$$A=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

اینک واضحست که مخرج مشترک $(a-b)(b-a)(a-c)$ میباشد پس

$$A=\frac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(b-c)(a-c)}=\frac{0}{(a-b)(b-c)(a-c)}=0.$$

- چنانکه ملاحظه میشود استعمال تبصره نمره ۶۰ اغلب باعث سهولت و اختصار عمل میشود و در مسائل باید قواعد مذکوره در آن تبصره را مراعات کرد

مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$B = \frac{a+b}{(c-a)(c-b)} + \frac{c+a}{(b-a)(b-c)} + \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} \equiv 0$$

مسئله ـ صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید

$$y \equiv \frac{x^2-a-b}{(c-a)(c-b)} + \frac{x^2-c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{x^2-b-c}{(a-b)(a-c)} \equiv 0$$

حل ـ فوراً معلوم میشود که :

$$y \equiv Ax^2 + B \equiv 0$$

A و B کسوری هستند که در دو مسئله فوق متحد بودن آنها با صفر تحقیق شد)

طریق دیگر ـ y نسبت به x از درجه دوم است ولی بازا ارزش

مقادیر $x = \pm\sqrt{a+b}$ و $x = \pm\sqrt{a+c}$ و $x^2 = \pm\sqrt{b+c}$

صفر میشود پس $y \equiv 0$

مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-a)} \equiv 0$$

$$\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} - \frac{2}{y-x} - \frac{2}{y-z} - \frac{2}{x-z} \equiv 0$$

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \equiv 1$$

$$\frac{y-z}{x^2-(y-z)^2} + \frac{z-x}{y^2-(z-x)^2} + \frac{x-y}{z^2-(x-y)^2} \equiv 0$$

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^3}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}\equiv a+b+c$$

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}\equiv 0.$$

$$\frac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ac}{(b-c)(b-a)}+\frac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(c-b)}\equiv -1$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\equiv 1$$

مسئله ـ عبارت $A=\frac{ab+ac}{bd-cd}\times\frac{ab-ac}{bd+cd}$ را مختصر کنید

حل ـ موافق قاعدهٔ ضرب کسور چنین خواهیم داشت

$$A=\frac{(ab+ac)(ab-ac)}{(bd-cd)(bd+cd)}\equiv\frac{a^2(b^2-c^2)}{d^2(b^2-c^2)}=\frac{a^2}{d^2}$$

مسئله ـ عبارت ذیل را ساده کنید

$$M=\frac{a^2-x^2}{a+b}\times\frac{a^2-b^2}{ax+x^2}\times\left(a+\frac{ax}{a-x}\right)$$

حل ـ عبارت فوق را بترتیب چنین مینویسیم :

$$M=\frac{a^2-x^2}{a+b}\times\frac{a^2-b^2}{ax+x^2}\times\frac{a^2}{a-x}\equiv\frac{a^2(a^2-b^2)(a^2-x^2)}{(a+b)(ax+x^2)(a-x)}$$

$$\equiv\frac{a^2(a-b)}{x}$$

مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$3a\times\frac{4a}{5}=\frac{12a^2}{5}\qquad a^2\times\frac{3a^3}{6x}=\frac{a^5}{2x}$$

$$(a+b)^2\times\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a+b}\qquad (x-y)\times\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x}{V}$$

$$\frac{2a}{3b}\left(-\frac{5b}{4a^2}\right)=-\frac{5}{6a}. \qquad \left(\frac{-a}{-b}\right)\left(\frac{+b}{-a}\right)=-1$$

$$\left(\frac{7a^m b^{n-1} c}{8m^n p^{r+1} q^h}\right)^3=\frac{343a^{3m} b^{3n-3} c^3}{512 m^{3n} p^{3r+3} q^{3h}}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{b}{a}\times\frac{d^2}{c^2}=\frac{d}{c}.$$

$$\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ac}\times\frac{c^2}{ab}=1$$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\times\frac{4x}{x+y}=\frac{4x(x-y)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x^2-y^2}{a+b}\times\frac{a^2-b^2}{x+y}=(x-y)(a-b)$$

$$\frac{16x^2-9a^2}{x^2-4}\times\frac{x-2}{4x-3a}=\frac{4x+3a}{x+2}$$

$$\frac{ax-x^2}{a^2+2ax+x^2}\times\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}=\frac{ax}{a^2-x^2}.$$

$$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\times\frac{a+b}{a-b}\times\left(\frac{a^2-ba+b^2}{a^2+ab+b^2}\right)^2=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

$$\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{ab}.$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{ab}.$$

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4a^2}{b^2-a^2}\right)\times\frac{a^2+2ab+b^2}{4a}=\frac{(a+b)^2}{a-b}$$

$$\frac{a^2-x^2}{a+b}\times\frac{a^2-b^2}{ax+x^2}\times\left(a+\frac{ax}{a-x}\right)=\frac{a^2(a-b)}{x}$$

$$\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{x^2+xy}=\frac{x^2+y^2}{x}$$



$$\frac{1-x^2}{1+2y+y^2} \times \frac{1-y^2}{y^2-2xy+x^2} \times \left(\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right) = \frac{1+x}{(1+y)(x-y)}.$$

$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1\right) \times \left(\frac{a+c-b}{a+b+c} \times \frac{a+b-c}{(b+c-a)}+1\right) = 2.$$

مسئله ـ عبارت $x = \frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} : \frac{b^2}{a^2-b^2}$ را ساده کنید

حل ـ موافق قاعده تقسیم کسور :

$$x = \frac{(ab+b^2)(a^2-b^2)}{b^2(a^2-2ab+b^2)}$$

اتمام بر عهده متعلم است   جواب $\frac{(a+b)^2}{(a-b)}$

۶ مسئله ـ تحقیق کنید که :

$$\left(x+\frac{1-x}{1+x}\right)\left(1-\frac{x(1-x)}{1+x}\right) = 1$$

$$\left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right) : \left(1-\frac{a-b}{a+b}\right) = \frac{2a}{b-a}.$$

$$\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^4-b^4} : \frac{2(a+b)^2}{a-b} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}$$

$$\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{z^2-x^2-y^2+2xy} : \frac{x+y+z}{y+z-x} = \frac{x+y-z}{x-y+z}.$$

$$\frac{a^4+b^4}{a^3-b^3} : \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} = \frac{a^4+b^4}{a^4+a^2b^2+b^4}$$

$$\frac{a^2+ab}{a^2+b^2} : \frac{ab(a+b)^2}{a^4-b^4} = \frac{a-b}{b}.$$

$$\frac{2x-2y}{3z+3u} : \frac{4x-4y}{az+au} = \frac{a}{6}.$$

۶۴ - کسور مرکب

مقصود از کسر مرکب کسری است که صورت و مخرج آن نیز کسر باشند برای مختصر کردن کسر مرکب باید ابتدا صورت و مخرج آنرا مختصر نمود بعد صورت را بمخرج تقسیم کرد

مسئله - کسر $y = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1}}$ را مختصر کنید

حل - واضحست که :

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4x}{x^2-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x^2+1)}{x^2-1}$$

پس $y = \dfrac{4x}{x^2-1} : \dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

مسئله - عبارت $z = \dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{y} - x}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}} \times \dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$ را مختصر کنید

حل - فوراً معلوم میشود که :

$$\frac{x^2+y^2}{y} - x = \frac{x^2+y^2-xy}{y} \quad , \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}$$

بقسمی که : $\dfrac{x^2+y^2-xy}{y} : \dfrac{x-y}{xy} = \dfrac{x(x^2+y^2-xy)}{x-y}$ = کسر اول

پس : $z = \dfrac{x(x^2+y^2-xy)}{x-y} \times \dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$

$$= \frac{x(x^2+y^2-xy)(x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2-xy)} = x$$



مسئله - کسر مسلسل ذیل را مختصر کنید

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}$$

حل

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{a+1}{a}}}=\frac{1}{1+\frac{a}{a+1}}=\frac{1}{\frac{2a+1}{a+1}}=\frac{a+1}{2a+1}$$

مسئله - کسر مسلسل ذیل را ساده کنید:

$$\frac{x^2}{1-\frac{1}{x^2+\frac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}}$$

حل - کسر فوق را مرتباً چنین می‌نویسیم:

$$\frac{x^2}{1-\frac{1}{x^2+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+1}{x}}}}=\frac{x^2}{1-\frac{1}{x^2+\frac{1}{x}\times\frac{x}{x^2+1}}}=\frac{x^2}{1-\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2+1}}}$$

$$=\frac{x^2}{1-\frac{1}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}}}=\frac{x^2}{1-\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}}=\frac{x^2}{\frac{x^4}{x^4+x^2+1}}$$

$$=x^2:\frac{x^4}{x^4+x^2+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$$

مسئله تحقیق کنید که:



$$\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{x-1}\quad,\quad\frac{1+\frac{b}{a-b}}{1-\frac{b}{a+b}}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}=\frac{ad+bc}{ad-bc}\ ,\quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\frac{y+x}{y-x}$$

$$\frac{x+\frac{a^2}{x}}{x-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{x^2}{x^2-a^2}\ ,\quad \frac{a+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a}}=\frac{a^2+1}{a^2-1}$$

$$\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\quad \frac{\frac{a}{a-x}-\frac{a}{a+x}}{\frac{x}{a-x}+\frac{x}{a+x}}=1$$

$$\frac{a(a-b)-b(a+b)}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}=a^2-b^2\ ,\quad \frac{1-\frac{x(1-y)}{x+y}}{1+\frac{1-y}{x+y}}=y$$

$$\frac{\frac{2a-5b}{2a+5b}+\frac{2a+5b}{2a-5b}}{\frac{2a+5b}{2a-5b}-\frac{2a-5b}{2a+5b}}=\frac{4a^2+25b^2}{20ab}\ ,\quad \frac{\frac{a^2}{x^2}+\frac{a}{x}+1}{\frac{b^2}{x^2}-\frac{b}{x}+1}=\frac{a^2+ax+x^2}{b^2-bx+x^2}$$

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}=\frac{ab}{(a^2+b^2)}$$

$$\frac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}}{\frac{2}{x^2-y^2}}-(x-y)(x+y)=2y^2$$

$$\frac{1+\frac{x}{1+x}}{x+\frac{1}{1+x}}\ ;\quad \frac{(x+1)^2-x^2}{x^2+x+1}=1\qquad \frac{\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}}{\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}}=1$$

$$\frac{\frac{1}{ab}-\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc}}{\frac{a^2-(b-c)^2}{a}}=\frac{1}{bc(b-a-c)}$$

$$\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}}-x-\frac{1}{x-1}}=x$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}} : \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}} = \frac{b+c-a}{a+c-b}$$

$$\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right] : \left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right] = \frac{x^2}{2-x^2}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{x}{ab}\right)(a+b+x)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{x^2}{a^2b^2}} = ab$$

$$\frac{3abc}{bc+ac+ab} - \frac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 1$$

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1} - \frac{1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}{\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^3-2ab^2-2b^3}{a^3+b^3}$$

$$\frac{x+y}{xy}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\frac{y+z}{yz}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)+\frac{x+z}{xz}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \equiv 4$$

$$\frac{1}{x-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}} = \frac{x^2+1}{x^3} \quad , \quad \frac{1}{a-b+\frac{1}{a-\frac{1}{b}}} = \frac{ab-1}{a^2b-ab^2-a+2b}$$

$$\frac{1}{x-\frac{1}{x}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{9x^2-64}{x-1-\frac{1}{1-\frac{x}{x+4}}} = 4(3x+8) \quad , \quad 1+\frac{x}{1+x+\frac{2x^2}{1-x}} = \frac{1+x}{1+x^2}$$

$$\frac{\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}}{1-\frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}} = \frac{a-c}{1+ac}$$

$$\frac{\left[\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\times\frac{x^2-y^2}{x^3+y^3}\times\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\right]:\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}{\frac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}}=\frac{x-y}{xy}$$

$$\frac{(b+c)^2+2(b^2-c^2)+(b-c)^2}{(b^4-2b^2c^2+c^4)\left[\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{2}{b^2-c^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]}=1$$

$$\frac{2-4x}{4x-2-\frac{4x}{1+\frac{\frac{1}{2x-1}}{1+\frac{1}{4x-1}}}}=-\frac{3-4x}{8x^2-6x+3}$$

$$\left[\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}-\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\right]:\frac{8}{\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\right)}=-1$$

$$\frac{6x^2y^2}{m+n}:\left[\frac{3x(m-n)}{7(r+s)}:\left\{\frac{4(r-s)}{21xy^2}:\frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right\}\right]=\frac{32}{3}$$

$$\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2ab}-1\right]\left[\frac{(a-b)^2}{4ab}+1\right]}{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}\times\frac{\left[(a+b)^2-ab\right]\left[(a-b)^2+ab\right]}{(a-b)^3+3ab(a-b)}\times$$

$$\left[\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\right]=\frac{a^2-b^2}{16ab(a^2+b^2)}$$

$$\frac{x^2}{1-\frac{1}{\frac{\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}}}+\frac{x^2}{1-\frac{1}{\frac{\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}}}=2x^2$$



منطق کردن مخرج کسور

اغلب برای اختصار لازم میشود که وقتی مخرج کسری عبارتی اصم است آن کسر را بکسر دیگری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنیم و برای اینکار باید صورت و مخرج کسر مفروض را در عبارتی ضرب کرد که حاصل ضرب مخرج در آن عبارت عبارت منطقی گردد

مسئله ۱ - کسری $\frac{P}{\sqrt{Q}}$ را بکسری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنید

حلّ - واضحست که $\sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q} = Q$ پس کافیست صورت و مخرج آنرا در $\sqrt{Q}$ ضرب کنیم نتیجه میشود $\frac{P}{\sqrt{Q}} = \frac{P\sqrt{Q}}{Q}$

مسئله ۲ - کسری معادل $\frac{P}{\sqrt[3]{Q}}$ چنان تعیین کنید که مخرج عبارت منطقی باشد

حل - کافی است صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{Q^2}$ ضرب کنیم

مسئله ۳ کسری $\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ را بکسری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنید

حلّ - از ملاحظه قضیه نمره (۵۷۱) معلوم میشود که باید صورت و مخرج را در مزدوج مخرج یعنی $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ ضرب کرد .

مسئله - تحقیق کنید که :



$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ و $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}\ ,\quad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}\ ,\quad \frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\ ,\quad \frac{5}{\sqrt{2}-1}=5(\sqrt{2}+1)$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ,\quad \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{a^2+b+2a\sqrt{b}}{a^2-b}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\sqrt{7}+\sqrt{5}\ ,\quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=5+2\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}+a}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{b}+a}=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}-ab}{b-a^2}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}+2}=\sqrt{8}+6-\sqrt{6}-\sqrt{27}\ ,\quad \frac{m}{\sqrt[3]{m}}=\sqrt[3]{m^2}$$

$$\frac{2a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=a(2+2\sqrt{2})\ ,\quad \frac{c}{\sqrt[m]{a}}=\frac{c\sqrt[m]{a^{m-1}}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\ ,\quad \frac{a}{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3]{a^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=1+\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}+5)$$

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}=\frac{2(a^2-b)}{a^2+b}\ ,\quad \frac{1}{i}=-i$$

$$\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{b-a}}=i$$



۶۰ — همه از اینکه یکمرتبه صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم معقول حاصل

نمیشود بلکه باید چندین مرتبه اعمال مختلفه مجری داشت و حیل جبری بکار برد چنانکه ذیلا مشاهده میشود

مسئله - کسر معادل $a=\frac{1}{\sqrt{\sqrt5-\sqrt3}}$ تقسیمی تعیین کنید که مخرج منطق باشد

حل - موافق مسئله اول - $a=\frac{\sqrt{\sqrt5-\sqrt3}}{\sqrt5-\sqrt3}$ و موافق مسئله سوم

$$a=\frac{\sqrt{\sqrt5-\sqrt3}\,(\sqrt5+\sqrt3)}{(\sqrt5-\sqrt3)(\sqrt5+\sqrt3)}=\frac{\sqrt{2(\sqrt5+\sqrt3)}}{2}$$

مسئله - کسر $x=\frac{1}{\sqrt2+\sqrt3+\sqrt5}$ را بواسطهٔ منطق کردن مخرجش ساده کنید

حل - در کسر مفروض مرتباً بطریق ذیل عمل میکنیم :

$$x=\frac{1}{(\sqrt2+\sqrt3)+\sqrt5}=\frac{\sqrt2+\sqrt3-\sqrt5}{(\sqrt2+\sqrt3)^2-5}=\frac{\sqrt2+\sqrt3-5}{2\sqrt6}$$

$$=\frac{\sqrt6\,(\sqrt2+\sqrt3-\sqrt5)}{12}=\frac{2\sqrt3+3\sqrt2-\sqrt{30}}{12}$$

مسئله - کسر $x=\frac{3+\sqrt6}{5\sqrt3-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$ را مختصر کنید

حل - واضحست که $5\sqrt3-2\sqrt{4\times3}-\sqrt{16\times2}+\sqrt{25\times2}=$ مخرج

پس : $=5\sqrt3-4\sqrt3-4\sqrt2+5\sqrt2=\sqrt3+\sqrt2$

$$x=\frac{3+\sqrt6}{\sqrt3+\sqrt2}=(3+\sqrt6)(\sqrt3-\sqrt2)=\sqrt3$$

مسئله - کسر $Q=\frac{2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ را بجبری که مخرجش منطق باشد تبدیل کنید

حال - میدانید که ؛

$$x-y=\frac{x^n-y^n}{x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1}}$$

حال اگر در این دستور بجای x و y بترتیب $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ قرار دهیم

حاصل میشود

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}$$

پس :

$$Q=\frac{P\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b}$$

مسئله - تحقیق کنید که :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{12}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{10}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{30}\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{11}\right)}{60}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{11}\right)}{24}$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)\left[a+b-1-2\sqrt{ab}\right]}{a^2+b^2+1-2\left(a+b+ab\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha+\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)}}{2\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{2}$$



$$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{3})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{20}}=\frac{(\sqrt{2}-1)(5-\sqrt{2})}{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}=\frac{1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt{2}}=(\sqrt[4]{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)$$

مسئله - کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ را تبدیل کنید

طریق حل - باید اتحاد ذیل را استعمال کرد :

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$

مسئله - ثابت کنید که اگر $\alpha\delta=\beta\gamma$ باشد تساوی ذیل برقرار است

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}=\frac{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\gamma})}{(\gamma-\delta)(\alpha-\gamma)}$$

مسئله - صحت اتحاد ذیل را ثابت کنید .

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

استعمال $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ را بمجموع دو رادیکال تبدیل کنید .

حل - در این مثال $a=3$ و $b=8$ پس

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}} = \sqrt{2}+1$$

مسئله - رادیکالهای ذیل را بمجموع دو رادیکال تبدیل کنید

جواب	رادیکال
$5-\sqrt{2}$	$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$
$1+\sqrt{3}$	$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(هفتمین مسئله تفریحی)

سه نفر هر یک یکی از شیئی مختلف را برداشته اند معلوم کنید هر یک کدام یک از اشیاء را تصرف کرده اند

((برای سهولت سه نفر را بترتیب اولی و دومی و سومی و سه شیئی مفروض را نیز بترتیب شیئی اول و شیئی دوم و شیئی سوم نامیده و آنها را بترتیب بحروف a و e و i و o و u مینمائیم))

۲۴ سنگ ریزه و مهره برداشته یکی باولی و دو عدد بدومی و سه عدد بسومی بدهید و بآنها امر کنید که در غیاب شما هر یک یکی از شیئی معین را بردارند بعد بآنکه شیئی اول را برداشته بگوئید باندازهٔ سنگریزه یا مهره هائیکه باو داده اید از ۱۸ سنگریزه یا مهره



که مانده است بردارد و تا بکه شیئ دوم تصرف کرده امر کنید باندازه مضاعف عده سنگریزه یا مهره هائیکه باو داده اید بردارد و بالاخره بسومی بگوئید چهار برابر عده مهره هائیکه باو عطا کرده اید از بقیه سنگ ریزه یا مهره ها تصرف کند

اکنون باید از عده سنگریزه یا مهره هائیکه میماند فهمید که هر یک از سه شیئ را کدام یک برداشته اند برای اینکار معین کنید می کنیم که در هر یک از حالات مختلفی که ممکن است روی دهد چند سنگریزه یا مهره می ماند ، بدیهی است که برحسب اینکه اولی ، دومی و سومی به اقسام مختلف سه شیئ را تصرف کنند شش صورت ذیل رخ میدهد :

سومی	دومی	اولی	سومی	دومی	اولی	سومی	دومی	اولی
e	ن	a	ن	a	e	ن	e	a
a	e	ن	e	a	ن	a	ن	e

و حالت اول - مهره هائیکه برداشته میشود عبارت است از

۱۷ = ۳ × ۴ + ۲ × ۲ + ۱ پس ۱ = ۱۷ - ۱۸ مهره دیگر میماند

درحالت دوم ۱۶ = ۴×۳ + ۱×۲ + ۱×۲ مهره برداشته و بنابراین
۲ = ۱۶ - ۱۸ مهره دیگر مانده است و بهمین قسم معلوم میشود که در ۴ حالت
دیگر بترتیب ۳ و ۵ و ۶ و ۷ مهره میماند . خلاصه این مطالب را میتوان
باین صورت نمود

باقیمانده	اولی	دومی	سومی
۱	a	e	i
۲	e	a	i
۳	a	i	e
۵	e	i	a
۶	i	a	e
۷	i	e	a.

برای اینکه این مطالب بخوبی در حافظه‌تان بماند کافی است عبارت ذیل را بخاطر
بسپارید :

Par fer, César, jadis, devint si grand prince

وقتی یک مهره بماند باید دو کلمه اول یعنی par fer را بخاطر بیاورید
چون حرف a اول و حرف e در مرتبه دوم قرار دارد معلوم میشود اولی
شیئ اول و دومی شیئ دوم و سومی شیئ دیگر را برداشته است و قس علیهذا در سایر حالات

فصل نسبت و تناسب ـ مسائل مختلفه

۶۷ **تعریف** ـ خارج قسمت دو عدد را **نسبت** آنها خوانند مثلاً $\frac{a}{b}$ نسبت دو مقدار a و b و ۲ نسبت ۳۲ و ۱۶ است صورت را مقدم و مخرج را تالی خوانند چون نسبت کسر است جمیع قواعد که بکسور تعلق میگرفت درباره نسبت نیز جاری است.

۳ ـ مسئله ـ مطلوب است نسبتهای ($۱۶\frac{۲}{۳}$ و $۱\frac{۲}{۳}$) و (۴ و ۶) و ($\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$)

(جواب ۱۰ و $\frac{۳}{۲}$ و ۲)

مسئله ـ نسبت ۱۲ : ۵ را بنسبتی تبدیل کنید که مقدمش واحد باشد

طریق حل ـ دو جمله نسبت را به پنج تقسیم کنید حاصل میشود $۵ : ۱۲ = ۱ : \frac{۱۲}{۵}$

مسئله ـ نسبت ۱۲ : ۳ را بنسبتی تبدیل کنید که مقدمش واحد باشد (جواب $\frac{۱}{۴}$)

مسئله ـ نسبت $\frac{a}{b}$ را بنسبتی که تالیش c باشد تبدیل کنید (جواب $c : \frac{ac}{b}$)

مسئله ـ اگر قند منی ۸٫۵ قران و چائی سیری ۱٫۵ قران باشد نسبت قیمت یکمن قند و یکمن چای چقدر است (جواب $\frac{۱۷}{۱۲۰}$)

۶۸ **تعریف** ـ بیان تساوی دو نسبت را تناسب خوانند مثلاً تساوی $\frac{۱۰}{۵} = \frac{۱۶}{۸}$ تناسب است. جمله اول و آخر تناسب را طرفین و جمله

دوم و سوم آنرا وسطین خوانند مثلاً در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، a و d طرفین و b و c وسطین هستند. جمله چهارم هر تناسب را چهارم جزء تناسب سه جزء دیگر خوانند مثلاً چهارم جزء تناسب ۳۲ و ۱۶ و ۲۰ ، ۱۰ است زیرا $\frac{32}{16}=\frac{20}{10}$

مسئله - کدام یک از تناسبهای ذیل صحیح است: $6\frac{1}{3}:2\frac{1}{2}=8:3$

$\frac{5}{2}=\frac{7}{20.8}$ و $\frac{0.65}{0.91}=\frac{0.4}{0.56}$ و $\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x+y}$

$8a:5b^2=5a:4\frac{1}{8}b^2$ ، $14\frac{1}{3}:11\frac{1}{5}=6\frac{3}{7}:5\frac{2}{5}$ و $\frac{x^2}{a^2}=\frac{x^3}{a}$

(جواب دومی و سومی و چهارمی و پنجمی و ششمی صحیح اند)

۶۹ - مقادیر متناسبه - فرض کنیم دو مقدار که با هم تغییر کنند مانند طول پارچه و قیمت آن یا عده عملجات و عده روزهائی که برای انجام کار لازم دارند

۱ - اگر وقتی یکی از آنها دو یا سه یا n برابر شود دیگری نیز به همین نسبت بزرگ گردد یعنی دو یا سه یا n برابر شود گویند آن دو مقدار با هم نسبت مستقیم دارند مثلاً - عموماً طول پارچه و قیمت آن با هم نسبت مستقیم دارند

۲ - اگر وقتی یکی از آنها دو یا سه یا بطور کلی n برابر شود دیگری به همین نسبت



تنزل کند یعنی $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{3}$ یا بطور کلی $\frac{1}{n}$ شود گویند آن دو مقدار با هم نسبت

معکوس دارند مثلاً عده عملجات و روزهائیکه برای انجام کار معینی لازم

دارند با هم نسبت معکوس دارند

۷۰ - تبصره - معمولاً وقتی دو مقدار را متناسب خوانند که نسبت مستقیم داشته باشند

مسئله - فنری بطول ۲۰ سانتیمتر متوالیاً اوزان ۱۲ گرمی و ۲۰ گرمی

و ۳۰ گرمی و ۴۰ گرمی آویزان میکنیم طول فنر بترتیب ۲۱٫۴۴ و

و ۲۲٫۳ سانتیمتر و ۲۳٫۶ سانتیمتر و ۲۴٫۸ سانتیمتر میشود معلوم کنیم

اولاً آیا وزن وزنه با طول فنر متناسب است ثانیاً آیا ازدیاد طول

فنر با وزن متناسب است

جواب: فقط ازدیاد طول فنر با وزن وزنه متناسب است

۷۱ تعریف - اگر دو نسبت متناسب با هم مساوی باشند هر یک از آنها را

واسطه هندسی دو جزء دیگر خوانند و جزء چهارم را سوم جزء متناسب

سه جزء دیگر را اصطلاح کرده اند مثلاً ۱۲ واسطه هندسی ۳ و ۴۸ میباشد

زیرا $\frac{12}{48}=\frac{3}{12}$ و ۴۸ سوم جزء متناسب ۳ و ۱۲ میباشد

۷۲ قضیه - در هر تناسب حاصلضرب طرفین معادل حاصل ضرب وسطین است



برای اثبات کافی است طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم حاصل میشود: $ad=bc$

۲- مسئله - کدام یک از دو تناسب $\frac{8}{7}=\frac{9}{2}$ و $\frac{25}{15}=\frac{5}{4}$ صحیح است

حلّ - تناسب اوّل صحیح نیست زیرا حاصل ضرب طرفینش ۶۳ و حاصل ضرب وسطینش ۱۶ است اما تناسب دوّم صحیح است زیرا حاصل ضرب طرفین و حاصل ضرب وسطین هر دو مساوی ۲۵ هستند

۶- مسئله - کدام یک از تناسبهای ذیل صحیحند: $\frac{9}{5}=\frac{3}{2}$ و $\frac{2}{15}=\frac{3}{5}$ و $\frac{7}{4}=2$ و $\frac{20}{90}=\frac{12}{9}$ ، $\frac{20}{3}:5=\frac{3}{4}$ ، $\frac{18}{9}=2$

(جواب فقط دو تناسب پنجم و ششم صحیح است)

مسئله - ثابت کنید که اگر x واسطه هندسی a و b باشد $x^2=ab$ است

مسئله - مطلوبست چهارم جزء تناسب ۳ و ۲۰ و ۵

حلّ - اگر x چهارم جزء تناسب ۵ و ۲۰ و ۳ باشد $\frac{5}{20}=\frac{3}{x}$ یا

$5x=60$ پس $x=\frac{60}{5}=12$

مسئله - چهارم جزء تناسب ۲ و $4\frac{1}{2}$ و $9\frac{1}{3}$ را تعیین کنید (جواب ۲۱)

۲ مسئله - مطلوبست سوم جزء تناسب (۹ و ۶) یا (۳ و ۱) (جواب ۴ و $\frac{۱}{۳}$)

مسئله - اگر $۵y = ۲x$ باشد نسبت x و y چقدر است (جواب $\frac{۵}{۲}$)

مسئله - مطلوبست واسطهٔ هندسی $۷a$ و $\frac{a}{۷}$ (جواب a)

۴ مسئله - ثابت کنید که از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسبهای ذیل نتیجه میشود

$$(۱)\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad (۲)\ \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \qquad (۳)\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(۴)\ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$ (ترکیب نسبت) $$(۵)\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$ (تفضیل نسبت).

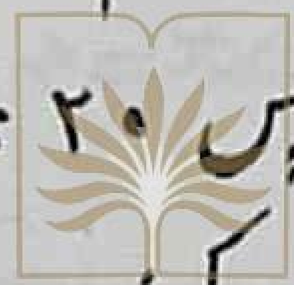
$$(۶)\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

اثبات این قضایا بسیار سهل است مثلاً برای اثبات دستور (۴) کافیست یکواحد بطرفین تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ افزوده تجنیس کنیم و نیز برای اثبات دستور (۶) کافی است که طرفین تساوی (۴) را بطرفین تساوی (۵) تقسیم نمائیم وقس علیهذا الی آخره.

مسئله - بنا بر آنکه $\frac{۴}{۷} = \frac{x}{x+۱۵}$ باشد x را حساب کنید.

حل - موافق دستور (۱) تناسب فوق را باین شکل مینویسیم:

$\frac{x+۱۵}{x} = \frac{۷}{۴}$ یا پس از تفضیل نسبت $\frac{۱۵}{x} = \frac{۳}{۴}$ پس $x = ۲۰$



۱۵ مسئله - در هر یک از تناسبات ذیل مقدار x را حساب کنید:

$\frac{3}{2}=\frac{1+x}{x}$ ، $28:21=32:7x$ ، $\frac{5}{6}=\frac{11-x}{x}$

$\frac{8}{4}=\frac{5+x}{x}$ ، $\frac{a+b}{a-b}=x:(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})$ ، $21:23=x:(4+x)$

$\frac{7}{x+3}=\frac{1}{x-3}$ ، $\frac{a}{b}=\frac{a+x}{a}$ ، $\frac{a+b}{a}=\frac{x+n}{x}$

$4x:5x=\frac{x}{18-x}$ ، $\frac{3}{2}=\frac{4+x}{4-x}$ ، $\frac{a+b}{a-b}=\frac{a+x}{a-x}$

جواب بترتیب ۶ و ۴ و ۲ و ۴۲ ، $\frac{a+b}{ab}$ و ۳ و bn ، $\frac{a(a-b)}{b}$

۴ و b و $\frac{4}{5}$ و ۸

مسئله ـ بنابر آنکه $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}$ و $x-y=6$ ، x و y را حساب کنید

طریق عمل ـ تناسب اول را میتوان چنین نوشت : $\frac{5}{3}=\frac{x}{y}$ یا $\frac{x-y}{y}$ =

$\frac{2}{3}$ یا $\frac{6}{y}=\frac{2}{3}$ اتمام بر متعلم است (جواب ۱۵ و ۹)

مسئله ـ از تناسبات ذیل مقدار x و y را بدست آورید

$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\\ x+y=10\end{cases}$ $x=4$ ، $y=6$

$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{m+n}{m-n}\\ x+y=2m\end{cases}$ $x=m+n$ ، $y=m-n$

$\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\\ x+y=2b\end{cases}$ $x=\frac{2ab}{a+b}$ ، $y=\frac{2b^2}{a+b}$

$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\\ x+y=2m^2\end{cases}$ $x=m^2-n^2$ ، $y=m^2+n^2$

$\begin{cases}x=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}y\\ x+y=2ab\end{cases}$ $x=\frac{ab(a+b)^2}{a^2+b^2}$ ، $y=\frac{ab(a-b)^2}{a^2+b^2}$

$\begin{cases}\frac{x}{x^2-y^2}=\frac{b}{a(b^2-1)}\\ x+y=a(b+1)\end{cases}$ $x=ab$ ، $y=a$

$$\begin{cases} \frac{(a-b)x}{(a+b)y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \\ x-y = 2ab \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= a^2+ab+b^2 \\ y &= a^2-ab+b^2 \end{aligned}$$

مسئله ـ ثابت کنید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ باشد:

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

طریق اثبات ـ باید ملاحظه کرد که اگر مقدار نسبت مشترک را به r بنامیم

$a = br$ ، $c = dr$ ، $e = fr$ ، ... پس: $a+c+e+\dots = r(b+d+\dots)$

اتمام بر متعلم است

مسئله ـ بنا بر آنکه ورست روسی ۱٫۰۶۷ کیلومتر و فرسخ بحری ۵۵۵۷ متر باشد نسبت طول دو قطعه که طول یکی $\frac{۵}{۳}$ ورست و طول دیگری $\frac{۲}{۵}$ فرسخ بحری باشد چقدر است (جواب: تقریباً ۰٫۸)

مسئله ـ سه طول a ، b ، c مفروض است میدانیم که $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۴}$ ، $\frac{b}{c} = \frac{۸}{۱۵}$ تعیین کنید اندازهٔ a را وقتی c واحد فرض شود

(جواب $\frac{۲}{۵}$)

مسئله ـ چهار نقطه A ، B ، C ، D بترتیب بر خط xy قرار گرفته اند که: $AC = ۲۱$ ، $CB = ۱۵$ ، $BD = ۹۰$ تحقیق کنید که اولاً $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ و ثانیاً



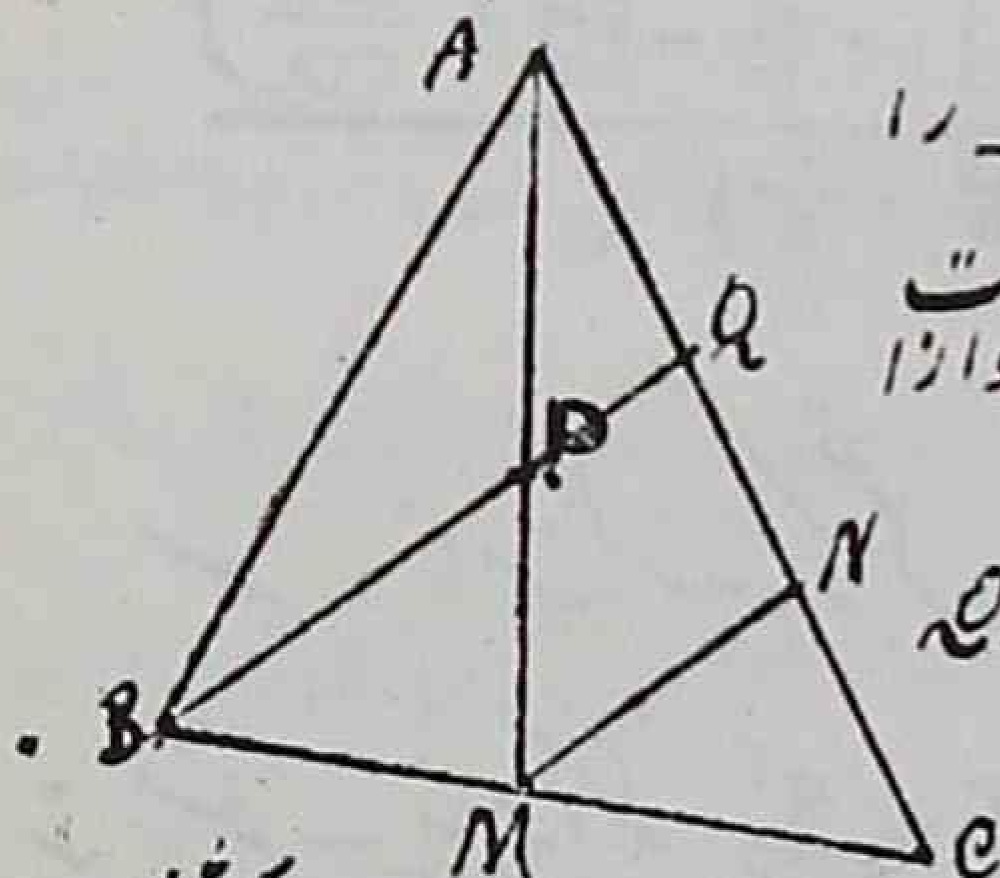
$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{CB} - \frac{1}{BD} \qquad \frac{2}{CD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BD} = \frac{1}{CB} - \frac{1}{AC}$$

رابعاً اگر O وسط CD باشد $OA^2 = OC.OD$ و $MC^2 = MA.MB$

مسئله مطلوبست محاسبه سوم جزء تنها $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ و $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}}$

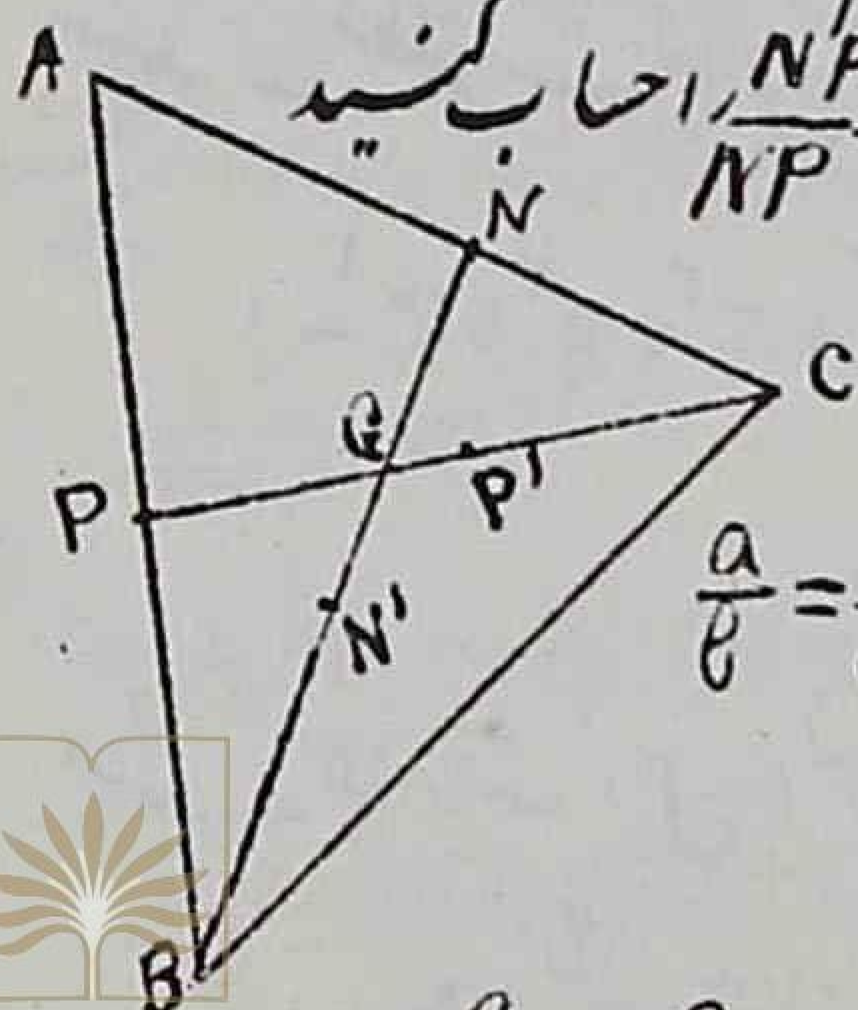
(جواب

مسئله ـ فرض کنیم AM میانهٔ مثلث ABC باشد. رأس B را بوسط AM یعنی P وصل می‌کنیم و خط BP را امتداد میدهیم تا AC را در نقطه Q تقاطع کند حساب کنید $\frac{AQ}{QC}$ را



طریق اثبات ـ از نقطه M خط MN را موازات BQ رسم نموده ثابت کنید که $QA=QN=NC$ اتمام بر متعلم است (جواب $\frac{1}{2}$)

مسئله ـ فرض کنیم CP و BN میانه های مثلث ABC و N' و P' اوساط آنها باشند مقدار نسبت های $\frac{GN'}{GB}$ و $\frac{GP'}{GC}$ و $\frac{N'P'}{BC}$ و $\frac{N'P'}{NP}$ را حساب کنید



جواب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$

مسئله ـ ثابت کنید که از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ تناسبات ذیل نتیجه میشود:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{am-cn+ep}{bm-dn+fp}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a^m-c^m+e^m}{b^m-d^m+f^m}}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

مسئله - مجموع و نسبت دو عدد معلوم است آن دو عدد را تعیین کنید

جواب - اگر x و y اعداد مطلوب و s مجموع و r نسبت آنها باشد:

$$x=\frac{rs}{r+1} \qquad y=\frac{s}{r+1}$$

مسئله - مطلوبست محاسبهٔ خارج قسمت تقسیم ذیل:

$$\frac{yz(1+\frac{2}{z}+\frac{a}{x}-\frac{3}{2yz})-3a(1+\frac{z}{2}-2y+\frac{xz}{3a})}{xz(\frac{a}{x}+1)+3ax(\frac{1}{a}+\frac{1}{x})}$$

جواب $2y-1$

مسئله - ثابت کنید که اگر $\frac{x}{t}=\frac{t}{y}=\frac{a}{b}$ باشد $\frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}$

مسئله - بنابرآنکه $\frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}$ و $y-x=c$ باشد x و y را حساب کنید

جواب $y=\frac{b^2c}{b^2-a^2}$

مسئله - مطلوبست خارج قسمت تقسیم $xyz(x^2+y^2+z^2+1)+$

$2x^2y^2z^2+x^2+y^2+z^2-1$ $x^2+y^2+z^2+2xyz-1$

جواب $xyz+1$

مسئله - عبارت ذیل را مختصر کنید:

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{x^2y^2}{xy+y^2}\right)\left(\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}\right)$$



مسئله ـ ثابت کنید که $n^3 - n$ همیشه به ۳ قابل قسمت است

مسئله ـ ثابت کنید که اگر $x+y=a$ و $xy=b$ باشد روابط ذیل محقق است

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2-2b & x^3+y^3=a^3-3ab \\ x^4+y^4=a^4+2b^2-4a^2b & x^5+y^5=a(a^4-5a^2b+5b^2) \end{cases}$$

مسئله ـ ثابت کنید که اگر $ab+bc+ac=0$ باشد $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$ است

مسئله ـ کسر $\frac{a^3+b^3+c^3+3ab^2+3a^2b}{a^2+b^2+c^2+2ab-ac-bc}$ مفروض است. اولاً مطلوب است مقدار عددی آن بازاء $a=\sqrt{-4}$ و $b=\sqrt{-9}$ و $c=\sqrt{-16}$ ثانیاً A را غیر ممکن التحویل کنید

(جواب، مقدار عددی: $10i$ و $A=a+b+c$)

مسئله ـ نظر بآنکه $a^x : a^y = a^6$ و $a^x \cdot a^y = a^{10}$ باشد مقدار عبارت ذیل را بدون محاسبهٔ x و y حساب کنید: $\frac{4xy+x^3-y^3+x^2y^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4-x^3y^3(x^4-y^4)}$

مسئله ـ اگر $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{7}$ و $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{3}{5}$ باشد نسبت α به γ را تعیین کنید

(جواب $\frac{12}{35}$)

مسئله ـ عبارت $9(2a-x)^2-4(3a-x)^2$ را بحاصل ضرب عوامل تجزیه کنید

جواب $x(5x-12a)$



مسئله ـ مطلوبست کمم $(9x^2-16y^2)^2$ و $9x^2-16y^2$ و $3x+4y$

$3x-4y$ (جواب $(9x^2-16y^2)^2$)

مسئله - ثابت کنید که از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تناسبات ذیل نتیجه میشود:

$$\frac{ac}{bd}=\frac{c}{d},\quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d},\quad \frac{ca^2-b}{ac^2-d}=\frac{b}{d},\quad \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}=b:d$$

مسئله - ثابت کنید که اگر $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{b^2+d^2}=\frac{c^2+d^2}{b^2}$ باشد نسبت a و b مثل نسبت c و d است

مسئله - فرض کنیم $A=x^2+2x-1$ و $B=3x^2-5x+16$ و $C=2x^2-x-1$ و $D=x^2-6x+13$ و $E=x^2-4x+9$ مطلوب است مقدار عددی A بازاء $x=-1+\sqrt{2}$ و مقدار B بازاء $\frac{5+\sqrt{-23}}{6}$ مقدار C بازاء -1 و مقدار D بازاء $3(1+i)$ و مقدار E بازاء $2-i\sqrt{5}$

(جواب ۵)

مسئله - تحقیق کنید که:

$$\frac{(x^a)^2}{x^{b+c}}\times\frac{(x^b)^3}{x^{c+a}}\times\frac{(x^c)^3}{x^{a+b}}=x^{a+b+c}.$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{y^{-13}}\times\frac{\sqrt[4]{y}}{x^{\frac{1}{6}}}\right):\frac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}=x^{\frac{7}{12}}\,y^{\frac{27}{2}}.$$

$$\left[\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\left[(x+a)^2-ax\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{\sqrt{x+a}}$$

$$\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

فرض کنید $a^{\frac{1}{3}}=x$ ، $b^{\frac{1}{3}}=y$

مسئله ـ مطلوبست مقدار $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$ بازاء $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

(جواب $a+b$)

مسئله ـ حساب کنید مقدار x^3+3x+2 را بازاء $x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}-1)^{-\frac{1}{3}}$

(جواب ۰)

هشتمین مسئله تفریحی

با ۱۴ ورق گنجفه ساعتی را که فردا صبح میخواهید بیدار شوید بشما میگوئیم !

۱ـ با چهارده ورق شکل ذیل را که صفحه ساعت است تشکیل دهید و برای اینکه

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱



ناظرین متوجه نشوند که این اوراق یک صفحه ساعت تشکیل میدهند نمره دو ورق را نظر گرفته و همه را برگردانید واضحست که در اینصورت نمره هریک از ورقها را نمیدانید

۲ - بشخصی امر کنید ساعتی را که میخواهد فردا صبح بیدار شود خیال کرده ضمناً انگشت خود را روی یکی از این اوراق بگذارد

۳ - امر کنید که از آن ورق شروع کرده ساعات متوالی را از ساعتی که خیال کرده برخلاف جهة حرکت عقربه های ساعات تا عددی که شما تعیین میکنید بشمارد (این عدد را باید باینطریق بدست آورید که با شماره ورقیکه انگشت خود را روی آن گذارده یکی از مضارب دوازده را اضافه کنند) ورقی را که بر روی آن وقف کرد ساعتی است که خیال کرده مثلاً اگر ساعت پنج را خیال کرده و انگشت خود را روی هفت گذارده باید پیش خود اعداد ۵ و ۶ و ۷ .... را بشمارد ولی انگشت را روی ۸ و ۷ و ۶ ..... بگذارد باید باین ترتیب تا: ۱۲+۷ یا ۲۴+۷ یا ۳۶+۷ .... وغیره بشمارد



این مسئله که بسیار جالب توجه است بحالت خاصی از مسئله ذیل میباشد

مسئله — از بین چند عدد که بیک شروع شده و بر محیط دایرهٔ قرار گرفته اند کدام را خیال کرده اند ؟

مسئله — فرض کنیم دایره ذیل را که اعداد طبیعی از یک تا ده بر محیط آن قرار گرفته اند

۱
۱۰ ۲
۹ ۳
۸ ۴
۷ ۶ ۵

و فرض کنیم شخصی عدد ۶ را خیال کرده باشد بگوئید انگشت خود را بر روی یکی از اعداد دایره فوق بگذارد مثلاً فرض کنیم اینعدد ۸ باشد. برای اینکه از ۸ به ۶ برسیم باید بگوئیم ۸ و ۷ و ۶ . حال اگر بآن شخص امر کنیم که ۸ و ۷ و ۶ را بشمارد امّا بجای اینکه بگوید ۸ و ۷ و ۶ بگوید ۶ و ۷ و ۸ رقمی را که بر روی آن متوقف میشود ۶ یعنی عددی است که خیال کرده و بدیهی است که اگر بر عدد ۸ یک یا چند ده علاوه کند و بترتیب فوق از ۶ تا عدد حاصل بشمارد همیشه به ۶ میرسد.

نهمین مسئلهٔ تفریحی

چگونه ریاضی دان غالب میشود ؟

شخصی عددی کوچکتر یا مساوی عدد معین a میگوید. دیگری عددی کوچکتر یا مساوی a بر آن میفزاید. بعد اولی عددی موافق همان شرط بحاصل اضافه میکند وقس علیهذا الی آخر. هر کس زودتر بعدد n که قبلاً معین کرده اند رسید بازی را برده است. میخواهیم بدانیم آنکه بازی را شروع میکند چه کند تا همیشه غالب باشد ؟

حل - واضحست که اگر اولی زودتر به $n-a-1$ برسد دومی هر چه بگوید باخته است و نیز اگر اولی زودتر به $n-2a-2$ یا $n-3a-3$ و ...... وغیره برسد دومی بازی را خواهد باخت پس سرّ غلبه اولی بسیار سهل است :

باید قسمی رفتار کند که اعدادی را که متوالیاً میگوید مرتباً جمل سلسلهٔ فوق باشند

مثال - میخواهند به عدد ۷۵ برسند بنا بر آنکه هیچیک نتوانند از ۱۰ تجاوز کنند ۱۰ اعدادی را که شروع کننده باید بخاطر بسپارد عبارتند از :

۴ ۱۵ ۲۶ ۳۷ ۴۸ ۵۹

مثلاً فرض کنیم اولی بگوید ۲ (عددی کوچکتر از ۴) دومی هر عددی که به ۲ میفزاید نمیتواند به ۱۵ برسد مثلاً اگر ۸ به ۲ بیفزاید ۱۰ حاصل میشود آنوقت اولی میگوید ۱۵ و عمل را (مثلاً) بطریق ذیل امتداد میدهند

دومی	اولی
۲۵	۲۶
۳۰	۳۷
۴۰	۴۸
۵۸	۵۹ بازی را برده است

تبصره — کوچکترین جمله سلسله که باید شروع کننده در نظر داشته باشد باقیمانده تقسیم n است بر $a+1$ (در مثال فوق باقیمانده تقسیم ۷۰ به ۱۱ = ۱ + ۱۰ ، ۴ است) و برای بدست آوردن سایر جمل کافی است انجمله را به مضارب متوالی $a+1$ بیفزائیم و با ملاحظه اعداد سلسله که سرّ بردن و باختن مسئله در آن است بسهولت در نظر میآیند و نیز میتوان ملاحظه کرد که اعداد فوق جمل تصاعد عددی هستند که جملهٔ آخرش $n-a-1$ و قدر نسبتش $a+1$ است



دهمین مسئله تفریحی

میخواهید اسباب حیرت نظار را فراهم کنید؟

شخصی ۲۷ ورق گنجفه برداشته یکی در مرتبه اول و یکی در مرتبه دوم و یکی در مرتبه سوم میگذارد و بعد مجدداً این عمل را تکرار میکند. (وقتی اوراق در دست آن شخص است روی آنها بطرف زمین است ولی وقتی آنها را بر زمین میگذارد آنها را برمیگرداند.) درضمن اینکه این شخص مشغول گسترانیدن اوراق است شخص دیگری یکی از آن اوراق را در نظر میگیرد و ما آنرا ورق منظور میخوانیم شخص اول پس از سؤال کردن دسته که ورق منظور در آن است اوراق را بدون برهم زدن جمع میکند و مجدداً مانند فوق آنها را به دسته تقسیم کرده دسته را که ورق منظور در آنست سؤال نموده و اوراق را جمع میکند و یکمرتبه دیگر آنها را بطریق فوق گسترده و دسته را که ورق منظور در آنست میپرسد. معلوم کنید در هر دفعه دسته را که ورق منظور در آنست در چه مرتبه بگذارد تا در دفعه سوم که اوراق را گسترانیده و مرتب کرد ورق منظور مرتبه را که قبلاً معین شده حائز باشد.

قاعده حل ـ فرض کنیم a شماره مراتبی باشند که بترتیب باید در دفعه اول

و دوم و سوم دسته را که ورق منظور در آنست در آنها قرار دهد تا R مرتبه باشد

که باید این ورق از آن خارج شود بسهولت ثابت میشود که : $R = 9(c-1) + 3(b-1) + a$

و از اینرو قاعده ذیل برای تعیین a و b و c بدست میآید :

اولاً R را تقسیمی بسه تقسیم میکنیم که در دفعه اول باقیمانده تقسیم صفر نباشد . این باقیمانده a خواهد بود

ثانیاً خارج قسمت را به ۳ تقسیم نموده بباقیمانده یکواحد میفزائیم b بدست میآید

ثالثاً خارج قسمت جدید را بسه تقسیم نموده بباقی یکواحد میفزائیم c حاصل میگردد

مثال ۱ ــ میخواهیم ورق منظور چهاردهمی باشد :

۱۴	۳		
۲	۴	۳	
	۱	۱	۳
		۱	۰
	b=۲	c=۲	

a=۲

یعنی باید دسته را که ورق منظور در آنست هر سه دفعه در مرتبهٔ دوم قرار داد

مثال ۲ ــ میخواهیم ورق منظور نهمی باشد :

۹	۳		
۳	۲	۳	
	۲	۰	۳
		۰	۰
	b=۳	c=۱	

a=۳

یعنی باید دفعات اول و دوم دسته را که ورق منظور در آنست در مرتبه سوم و دفعه سوم آنرا در مرتبه اول قرار داد (در مطبعه علمی بطبع رسید) والسلام علی من اتبع الهدی

قسمت اعظم کتاب در غیاب بنده بطبع رسیده است و تصحیحات لازمه (از قبیل تصحیح و مقابله سنگ و غیره) در آن بعمل نیامده است لذا اغلاطی چند در آن مشاهده می‌گردد که بجلب مهم‌ترین در غلط‌نامه ذکر شده و متمنی است قبل از قرائت اغلاط را تصحیح فرمایند

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۴	۶	در حدود	شامل
۱۵	۱۳	۰٫۰۰۳۹...	۰٫۰۰۴۵۵
۲۱	۴	در هر حالت یک	در هر حالت منهای یک
۲۷	۱۲	۲۸	$\frac{۵۹}{۳}$
۶۳	۲	$x^{۳}+۱$	$x^{۳}-۲x^{۲}+۲x+۱$
۷۱	۴	$a+b$	$-a+b$
۹۶	۱۰	$(x^{۲}-y)^{۲}-c^{۲}$	$(x-y)^{۲}-c$
۱۰۵	۲۲	$۲۴y^{۲}-...$	$۲۴x^{۲}-...$
۱۲۲	۸	هر کثیر الجمله	هر کثیر الجمله صحیح
۱۲۳	۱۳	کثیر الجمله	کثیر الجمله صحیح
۱۲۵	۱۴	۹۷۹	۱۹۴۶
۱۲۶	۶	نسبت یکطرف	نسبت بقوه ۲ یکطرف
۱۲۸	۱۰	$dx+d$	$cx+d$
۱۴۹	۱۴	تجزیه هر عبارت	تجزیه عبارتی
۱۶۴	۵	$+x^{۳}$	$-x^{۳}$
۱۹۷	۲	$۴ab$	$۱۶ab$
۲۰۰	۶	$\sqrt{\frac{۶(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}{۶}}$	$\sqrt{\frac{۲(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}{۲}}$
۲۰۰	۹	$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}-\sqrt{۵}}$	$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}-۵}$
۲۰۱	۱۲	$\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}}$	$\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}+\sqrt{۷}}$
۲۰۳	۴	$\sqrt{۲۷-۱۰\sqrt{۲}}$	$\sqrt[۳]{۲۷-۱۰\sqrt{۲}}$





صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۰۵	۱۷	رئس علیهذا	رئس علیهذا در حالات دیگر
۲۰۸	۴	خوانند قتی که	خوانند که
۲۱۱	۵	an	bn
۲۰۸	۲	عده عوارشب	عدهٔ عملیات
۲۰۸	۱۴	بجای $\frac{3}{12}$ و ۴۸ نوشته شود	
۲۱۲	۹	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$ درست.

سطر ۷ صفحهٔ ۴۱ و سطر ۱۱ صفحهٔ ۴۳ زاید است.

در صفحهٔ ۱۷۱ سطر ۷ بجای المجموع دو کثیر الجمله (مجموع دو کثیر الجملهٔ x^2-5x+8 ، x^2-6x+8) بخوانید.



(اعتذار)

طبع این کتاب بواسطه موانع غیر مترقبه که برای بنده پیش آمد مدتی بتأخیر افتاد کتابی هم که فعلا بانتشار آن نائل شده ام قسمتی از کتابی که در مقدمه وعده داده شده بیش نیست واگر میخواستم هر دو قسمت را دریك جلد تقدیم نمایم عده صفحات آن از ۵۰۰ متجاوز شده و بالنتیجه حجم کتاب از حد معمولی خارج میگردید. لذا چارهٔ بجز تقسیم کتاب اصلی بدو کتاب ندیدم. قسمت دوم این کتاب که شامل مطالب ذیل است تحت طبع وتا یك ماه دیگر منتشر خواهد گردید. از قارئین گرام امید عفو دارم.

غلامحسین مصاحب

(فهرست جلد دوم)

معادلات درجه اول – حل و بحث – معادلات حرفی و اصم حیل جبری و مسائل تفریحی دستگاه های درجه اول (دو مجهولی و سه مجهولی و غیره) مسائل درجه اول – حیل جبری و مسائل تفریحی – حل معادلات درجات عالیه (دوم وسوم وغیره) مسائلی که درامتحانات مختلفه داده شده است. مسائل هندسی – معادلات سیاله و غیره